

Quem disse?

Considere a soma abaixo

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

Essa soma tem um padrão repetitivo bem simples (+1).

Daí, explorando esse padrão repetitivo, você pode resolver a soma assim

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \text{!}$$

Mas agora, imagine que alguém pergunta

- Quem garante que isso está certo?* $\text{!}^?$

Bom, daí você pode responder

Olha aqui: !

- Para $n = 1$, a soma é apenas

$$1$$

e nesse caso, a coisa dá certo

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

- Para $n = 2$, a soma é

$$1 + 2$$

e nesse caso, a coisa também dá certo

$$1 + 2 = 3 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2}$$

- Para $n = 3$, a soma é

$$1 + 2 + 3$$

e nesse caso, a coisa também dá certo

$$1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \cdot (3+1)}{2}$$

Mas agora, a pessoa pode perguntar

- Será que vai continuar assim pra sempre?* $\text{!}^?$

Então você responde

Vai! porque tem um padrão repetitivo: !

- Olhe para a soma que vai até 4

$$1 + 2 + 3 + 4$$

e veja que dentro dela aparece a soma que vai até 3

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + 4}_{\frac{3 \cdot (3+1)}{2}}$$

- Agora, a gente pode resolver a soma assim

$$\frac{3 \cdot (3+1)}{2} + 4$$

- Para isso, a gente reescreve a coisa assim

$$\frac{3 \cdot (3+1)}{2} + (3+1)$$

e depois assim

$$\frac{3 \cdot (3+1)}{2} + \frac{2 \cdot (3+1)}{2}$$

e depois assim

$$\frac{(3+1) \cdot (3+2)}{2}$$

- E agora, é só observar que isso é igual a

$$\frac{4 \cdot (4+1)}{2}$$

Mas, a pessoa ainda não se convence

- Mas será que isso não é só uma coincidência numérica?* $\text{!}^?$

E daí, você responde

É não! isso vale para qualquer coisa (k): !

- Imagine que a fórmula vale até o k

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$$

- Agora considere a soma que vai até o $k+1$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + k+1$$

- Daí, a gente nota que a soma até k aparece aí dentro

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + k + k+1}_{\frac{k \cdot (k+1)}{2}}$$

- Logo, a gente pode calcular a soma assim

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2} + k+1$$

- Para isso, a gente reescreve a coisa assim

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2} + \frac{2 \cdot (k+1)}{2}$$

e depois assim

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2} + \frac{(1+1) \cdot (k+1)}{2}$$

e depois assim

$$\frac{(k+1) \cdot (k+1+1)}{2}$$

- E agora a gente observa que isso é a fórmula para $k+1$

$$\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2}$$

Aqui finalmente a pessoa se convence

- Ah sim! agora eu entendi ...* !!

Discussão

Mas, o que aconteceu?

Bom, o que aconteceu é que a gente encontrou outro padrão repetitivo

$$\frac{k \cdot (k+1)}{2} + k+1 = \frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2}$$

Quer dizer, essas duas coisas são a mesma coisa

$$\underbrace{\frac{k \cdot (k+1)}{2}}_* + k+1 = \underbrace{\frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2}}_*$$

— (*i.e.*, *elas tem o mesmo formato ...*)

Daí que, nós entramos em repetição



Logo, quando a gente observa que a coisa dá certo no começo

- $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$
- $1 + 2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{2}$

a gente já pode concluir que vai continuar dando certo pra sempre ...