

A soma dos quadrados

Agora considere esse outro exemplo

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$$

Os raciocínios que a gente viu na aula 02 para esse resultado não eram tão simples assim.

Mas, não é difícil verificar que a coisa dá certo para os primeiros valores de n

1²

+

2²

+

3²

+

...

└─→ 14 = $\frac{3(3+1)(2\cdot 3+1)}{6}$

└─→ 5 = $\frac{2(2+1)(2\cdot 2+1)}{6}$

└─→ 1 = $\frac{1(1+1)(1\cdot 2+1)}{6}$

Certo.

Mas quem garante que a coisa não vai dar errado lá na frente?

Bom, a gente pode raciocinar assim

- Imagine que a coisa dá certo para um número k

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$$

- Daí a gente pergunta: *Será que dá certo para $k + 1$?*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

- Bom, do lado esquerdo a gente vê a soma dos primeiros k quadrados.

E a gente já sabe quanto é isso — *(pelo Imagine que ...)*

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$\frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} + (k + 1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

- Daí, a gente reescreve o lado esquerdo assim

$$\frac{k(k+1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2}{6} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

depois assim

$$\frac{(k+1) \cdot (2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

- Aqui é mais fácil reescrever o lado direito assim

$$\frac{(k+1) \cdot (2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

depois assim

$$\frac{(k+1) \cdot (2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \stackrel{?}{=} \frac{(k+1) \cdot (2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

- E aqui já dá para ver que a coisa também deu certo para $k + 1$.

Logo a fórmula está correta.

Nós acabamos de ver o método da indução em ação.