

Soma de potências

Usando um truque bem velho, nós descobrimos na aula 01 que

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Mas, quem garante que essa fórmula está correta?

Bom, é bem fácil ver que a coisa dá certo para os primeiros valores de n

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & + & 4 & + & 8 & + & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & & & 7 & = & 2^{2+1} - 1 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & & & 3 & = & 2^{1+1} - 1 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & & & 1 & = & 2^{0+1} - 1 \end{array}$$

Mas, quem garante que não vai dar errado lá na frente?

Bom, a gente pode raciocinar assim

- Imagine que a coisa dá certo para um número k

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

- Daí a gente pergunta: *Será que dá certo para $k+1$?*

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^k + 2^{k+1} \stackrel{?}{=} 2^{k+2} - 1$$

- Bom, do lado esquerdo a gente vê a soma até o termo 2^k .

E a gente já sabe quanto é isso — (*pelo Imagine que ...*)

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \stackrel{?}{=} 2^{k+2} - 1$$

e depois assim

$$2^{k+2} - 1 \stackrel{?}{=} 2^{k+2} - 1$$

- E aqui a gente vê que a coisa deu certo para $k+1$.

Logo, a fórmula está correta.