

Soma de pares

Considere a soma

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n+1)$$

Mas, quem garante que essa fórmula está certa?

Bom, é bem fácil ver que a coisa dá certo para os primeiros valores de n

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & + & 4 & + & 6 & + & 8 & + & \dots \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & & & 12 & = & 3 \cdot 4 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & & & 6 & = & 2 \cdot 3 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & & & 2 & = & 1 \cdot 2 \end{array}$$

Mas, quem garante que não vai dar errado lá na frente?

Bom, a gente pode raciocinar assim

- Imagine que a coisa dá certo para o k -ésimo par $2k$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k \cdot (k+1)$$

- Daí a gente pergunta: *Será que dá certo para o $(k+1)$ -ésimo par?*

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + (2k+2) \stackrel{?}{=} (k+1) \cdot (k+2)$$

- Bom, do lado esquerdo a gente vê a soma até o k -ésimo ímpar.

E a gente já sabe quanto é isso — *(pelo Imagine que ...)*

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$k \cdot (k+1) + (2k+2) \stackrel{?}{=} (k+1) \cdot (k+2)$$

- Daí, a gente reescreve a coisa assim

$$k \cdot (k+1) + 2 \cdot (k+1) \stackrel{?}{=} (k+1) \cdot (k+1)$$

e depois assim

$$(k+2) \cdot (k+1) \stackrel{?}{=} (k+1) \cdot (k+1)$$

- E aqui a gente vê que a coisa deu certo para $k+1$.

Logo, a fórmula está correta.