

Soma com coeficientes

Na aula 01, a gente viu que

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$

Mas, quem garante que essa fórmula está correta?

Bom, é bem fácil ver que a coisa dá certo para os primeiros valores de n

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \cdot 2^1 & + & 2 \cdot 2^2 & + & 3 \cdot 2^3 & + & 4 \cdot 2^4 + \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 34 & = & (3-1) \cdot 2^{3+1} + 2 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 10 & = & (2-1) \cdot 2^{2+1} + 2 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 2 & = & (1-1) \cdot 2^{1+1} + 2 \end{array}$$

Mas, quem garante que não vai dar errado lá na frente?

Bom, a gente pode raciocinar assim

- Imagine que a coisa dá certo para um número k

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2$$

- Daí a gente pergunta: *Será que dá certo para $k+1$?*

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \dots + k \cdot 2^k + (k+1) \cdot 2^{k+1} \stackrel{?}{=} k \cdot 2^{k+2} + 2$$

- Bom, do lado esquerdo a gente vê a soma até o k -ésimo termo.

E a gente já sabe quanto é isso — (*pelo Imagine que ...*)

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$(k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + (k+1) \cdot 2^{k+1} \stackrel{?}{=} k \cdot 2^{k+2} + 2$$

- Daí, a gente reescreve o lado esquerdo assim

$$2 \cdot k \cdot 2^{k+1} + 2 \stackrel{?}{=} k \cdot 2^{k+2} + 2$$

e depois assim

$$k \cdot 2^{k+2} + 2 \stackrel{?}{=} k \cdot 2^{k+2} + 2$$

- E aqui já dá pra ver que a coisa deu certo para $k+1$.

Logo, a fórmula está correta.