

Soma de Fibonacci

Na lista de exercícios 01, a gente viu que

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Mas, quem garante que essa fórmula está correta?

Bom, é bem fácil ver que a coisa dá certo para os primeiros valores de n

$$\begin{array}{ccccccc} F_1 & + & F_2 & + & F_3 & + & F_4 & + & \dots \\ = & 1 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots \\ & & & & & \searrow & & & & \\ & & & & & & 4 & = & F_5 - 1 \\ & & & & \searrow & & & & & \\ & & & & & & 2 & = & F_4 - 1 \\ & & & \searrow & & & & & & \\ & & & & & & 1 & = & F_3 - 1 \end{array}$$

Mas, quem garante que não vai dar errado lá na frente?

Bom, a gente pode raciocinar assim

- Imagine que a coisa dá certo até o k -ésimo termo

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_k = F_{k+2} - 1$$

- Daí a gente pergunta: *Será que dá certo até o termo F_{k+1} ?*

$$F_1 + F_2 + \dots + F_k + F_{k+1} \stackrel{?}{=} F_{k+3} - 1$$

- Bom, do lado esquerdo a gente vê a soma até o k -ésimo termo.

E a gente já sabe quanto isso dá — (*pelo Imagine que ...*)

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$F_{k+2} - 1 + F_{k+1} \stackrel{?}{=} F_{k+3} - 1$$

- Daí, a gente reescreve o lado esquerdo assim

$$F_{k+3} - 1 \stackrel{?}{=} F_{k+3} - 1$$

- E aqui já dá pra ver que a coisa deu certo para $k+1$.

Logo, a fórmula está correta.