

Soma de PA

Agora, considere a seguinte soma

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + \dots + (4n - 1)$$

Para calcular essa soma, primeiro a gente reescreve o último termo assim

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + \dots + (2n + (2n - 1))$$

E daí, a gente reescreve a soma assim

$$\begin{array}{ccccccccc} 2n & + & 2n & + & 2n & + & \dots & + & 2n \\ + 1 & + & 3 & + & 5 & + & \dots & + & 2n - 1 \end{array}$$

Agora é fácil ver que a soma vale

$$n \cdot 2n + n^2 = 3n^2$$

Mas, quem garante que isso está certo?

Bom, é bem fácil ver que a coisa dá certo para os primeiros valores de n

- **n = 1:** $(2 \cdot 1 + 1) = 3 = 3 \cdot 1^2$
- **n = 2:** $(2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 2 + 3) = 12 = 3 \cdot 2^2$
- **n = 3:** $(2 \cdot 3 + 1) + (2 \cdot 3 + 3) + (2 \cdot 3 + 5) = 27 = 3 \cdot 3^2$

Mas, quem garante que não vai dar errado lá na frente?

Bom, a gente pode raciocinar assim

- Imagine que a coisa dá certo até um número k

$$(2k + 1) + (2k + 3) + (2k + 5) + \dots + (4k - 1) = 3k^2$$

- Daí a gente pergunta: *Será que dá certo para $k + 1$?*

$$(2(k + 1) + 1) + (2(k + 1) + 3) + \dots + (4(k + 1) - 1) \stackrel{?}{=} 3(k + 1)^2$$

- Fazendo as continhas dentro dos parênteses, a gente chega em

$$(2k + 3) + (2k + 5) + (2k + 7) + \dots + (4k + 3) \stackrel{?}{=} 3(k + 1)^2$$

- E daí, a gente nota que a soma do caso k não aparece no lado esquerdo.

Porque o termo $(2k + 1)$ está faltando.

- Ora, mas isso é bem fácil de resolver.

Quer dizer, basta somar $(2k + 1)$ dos dois lados

$$\begin{array}{ccccccccccc} (2k + 3) & + & (2k + 5) & + & (2k + 7) & + & \dots & + & (4k + 3) & \stackrel{?}{=} & 3(k + 1)^2 \\ + & (2k + 1) & & & & & & & & & + (2k + 1) \end{array}$$

- Agora, do lado esquerdo a gente vê a soma do caso k .

E a gente já sabe quanto isso dá — *(pelo Imagine que ...)*

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$3k^2 + (4k + 1) + (4k + 3) \stackrel{?}{=} 3(k + 1)^2 + 2k + 1$$

e depois assim

$$3k^2 + 8k + 4 \stackrel{?}{=} 3k^2 + 6k + 3 + 2k + 1$$

- E aqui já dá pra ver que a coisa deu certo para $k + 1$.