

O método da adivinhação

Agora considere a soma

S2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + (n-1).n

Quanto é isso?

Sei lá!

Bom, mas a gente pode fazer a seguinte esperteza

1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + (n-1).n
+ 2.2 + 2.3 + 2.4 + ... + 2.n
= 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + n.(n+1)

Ora, mas o resultado é quase a nossa soma S outra vez

Quer dizer, nós acabamos de descobrir que

S2 + 2.(2 + 3 + 4 + ... + n) = S2 - 1.2 + n.(n+1)

o que acaba nos levando a

1 + 2 + 3 + ... + n = n.(n+1)/2

Certo.

Só que isso a gente já sabia.

E a gente ainda continua sem saber quanto é a soma S2 ...

Mas, considere agora a soma

S3 = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + (n-2).(n-1).n

A ideia é aplicar a mesma esperteza outra vez

1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + (n-2).(n-1).n
+ 3.2.3 + 3.3.4 + 3.4.5 + ... + 3.(n-1).n
= 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + ... + (n-1).n.(n+1)

Quer dizer, o resultado é quase a soma S outra vez.

Daí que, a gente acabou de descobrir que

S3 + 3.(2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + (n-1).n) = S3 - 1.2.3 + (n-1).n.(n+1)

o que acaba nos levando a

1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + (n-1).n = (n-1).n.(n+1)/3

que é o resultado da soma S2.

Legal, não é?

Sim é, mas a gente continua sem saber quanto é a soma S3 ...

Pois é.

Mas agora já dá para adivinhar que basta aplicar a esperteza outra vez sobre a soma

S4 = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + 3.4.5.6 + ... + (n-3).(n-2).(n-1).n

E também já dá para adivinhar que no final a gente vai descobrir que

S3 = (n-2).(n-1).n.(n+1)/4

Hmm, pode ser.

Mas quem garante que isso está certo?

Bom, a gente pode provar isso por indução.

Quer dizer, veja que a coisa funciona para os primeiros valores de n

1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ...
6 = (3-2).(3-1).3.(3+1)/4
30 = (4-2).(4-1).4.(4+1)/4
90 = (5-2).(5-1).5.(5+1)/4

Certo.

Mas quem garante que não vai dar errado lá na frente?

Bom, a gente garante isso com o seguinte raciocínio

- Imagine que a fórmula dá a resposta correta até o k-ésimo termo

1.2.3 + 2.3.4 + ... + (k-2).(k-1).k + ...
(k-2).(k-1).k.(k+1)/4

- No próximo passo, a soma ganha o termo (k-1).k.(k+1)

1.2.3 + ... + (k-2).(k-1).k + (k-1).k.(k+1) + ...
(k-2).(k-1).k.(k+1)/4

- Logo, a resposta correta no próximo passo é

(k-2).(k-1).k.(k+1)/4 + (k-1).k.(k+1)

- E agora, fazendo algumas continhas a gente vê que isso é igual a

(k-2).(k-1).k.(k+1) + 4.(k-1).k.(k+1)
(k-1).k.(k+1).(k+2)/4

- Ora, mas essa é a resposta da fórmula para o próximo passo.

Logo a fórmula para S3 está correta.

Legal!

Agora é a sua vez.

Quanto é

S4 = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + ... + (n-3).(n-2).(n-1).n ?