

Teoria dos Autômatos e Linguagens Formais

aula 05: Raciocinando sobre caminhos e laços

1 Introdução



Imagine que você encontra o diagrama de um autômato em um livro.

Mas, você não sabe o que ele faz.

Daí, você mostra o diagrama para alguém.

A pessoa examina o diagrama, faz alguns raciocínios no papel, e depois ela diz a você que o autômato reconhece uma certa propriedade.

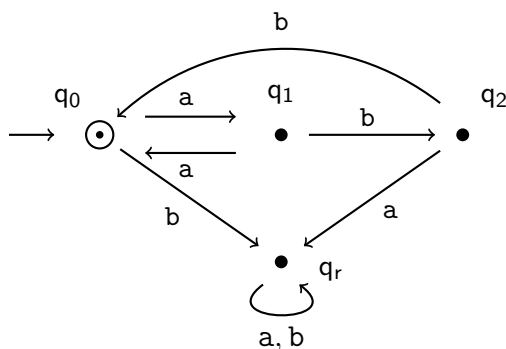
Mas, como é que ela fez isso?

Bom, hoje nós vamos aprender a fazer isso.

2 Raciocinando sobre caminhos e laços

A ideia chave é examinar os caminhos e laços do autômato.

Por exemplo,



Que palavras esse autômato aceita?

Bom, para descobrir isso a gente examina os caminhos que começam em q_0 e terminam em q_0 — (i.e., o estado inicial e único estado final)

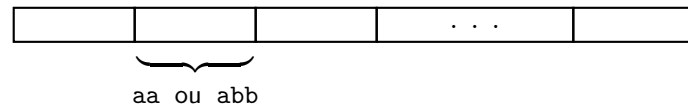
Existem basicamente dois caminhos desse tipo:

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_0 \qquad q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} q_0$$

E qualquer outro caminho é uma mera concatenação desses dois caminhos mais simples.

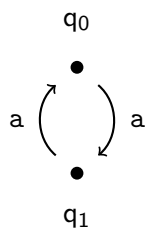
Daí que, nós acabamos de descobrir que o autômato reconhece

→ palavras formadas pela concatenação de blocos aa e abb



Mas, essa não é a única maneira de responder a pergunta.

Quer dizer, a esperteza aqui é notar que o primeiro caminho é um laço

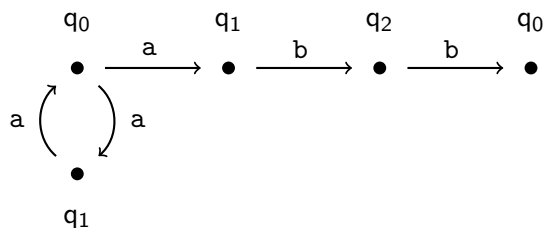


E que a cada volta no laço o autômato lê 2 a's.

Logo, após um número qualquer de voltas no laço o autômato vai ter lido um bloco de a's de tamanho par

$\underbrace{a \dots a}_{\text{par}}$

Daí, após o laço o autômato pode percorrer o segundo caminho



E nesse caso, o autômato vai ter lido um bloco da forma

$\underbrace{a \dots a}_{\text{ímpar}} bb$

Logo, nós também podemos responder a pergunta assim

→ palavras formadas pela concatenação de blocos da forma $\underbrace{a \dots a}_{\text{ímpar}}$

seguidas (opcionalmente) por um bloco $\underbrace{a \dots a}_{\text{par}}$

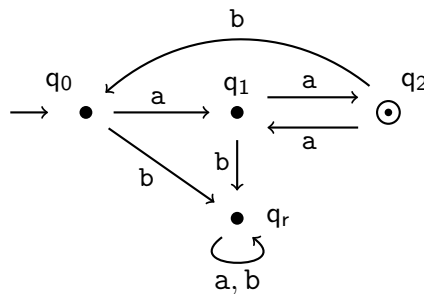
Legal, não é?

A seguir nós vamos ver outros exemplos.

Exemplos

a. Laços em torno do estado final

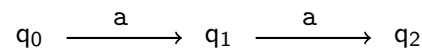
Considere o diagrama



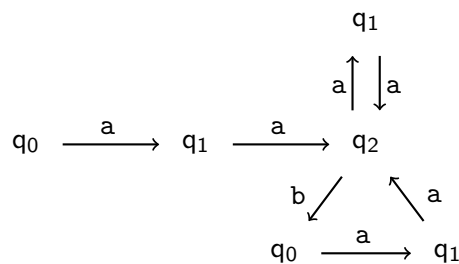
Que palavras esse autômato aceita?

Dessa vez, nós precisamos analisar os caminhos que começam em q_0 e terminam em q_2 .

A primeira observação é que esses caminhos devem iniciar com o segmento



E a seguir o caminho pode dar voltas em torno de q_2



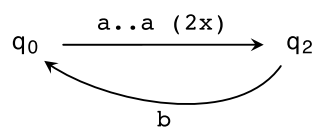
Daí que, o autômato aceita

→ palavras que começam com o fragmento aa
seguido por uma concatenação de blocos aa e baa

Mas, essa não é a única maneira de responder a pergunta.

As observações chave dessa vez são:

1. A concatenação do fragmento inicial aa com os blocos aa produzidos pelo laço $q_2 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2$, forma blocos de a's de tamanho par e deixa o autômato em q_2
2. Ao passar pela transição $q_2 \xrightarrow{b} q_0$, o autômato retorna ao estado q_0 e precisa voltar outra vez para q_2 formando um novo bloco de a's de tamanho par e deixa o autômato em q_2



Daí que, nós podemos dizer que o autômato aceita

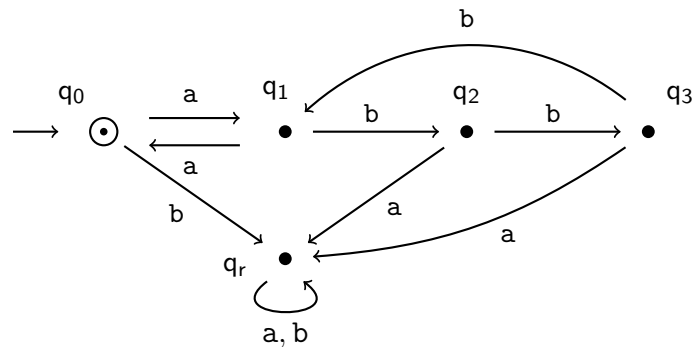
→ sequências de blocos de a's de tamanho par separados por um único b

$$\underbrace{a \dots a}_{\text{par}} b \underbrace{a \dots a}_{\text{par}} b \underbrace{a \dots a}_{\text{par}} b \underbrace{a \dots a}_{\text{par}}$$

◇

b. Laços em torno de um estado intermediário

Considere o diagrama



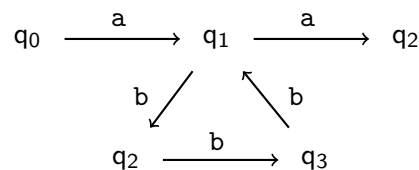
Que palavras esse autômato aceita?

Aqui nós precisamos analisar os caminhos que começam terminam no estado q_0 .

O caminho mais simples desse tipo é

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_0$$

Esse caminho pode ficar mais complicado quando ocorrem voltas em torno de q_1 (via q_2 e q_3)



Como cada volta em torno de q_1 lê 3 símbolos b, a contribuição total dessas voltas é um bloco de b's com tamanho múltiplo de 3 (possivelmente vazio).

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_0$$

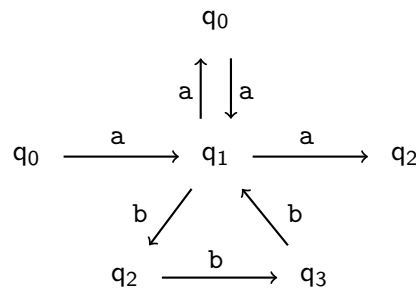
b . . b (3x)

Portanto, o autômato reconhece

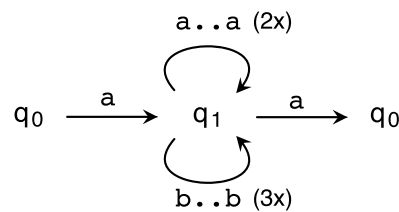
→ concatenações de blocos da forma $a \underbrace{b \dots b}_{3x} a$

Mas, essa não é a única maneira de responder a pergunta.

A ideia aqui é observar que existe outra maneira de dar uma volta em torno de q_1 — (*i.e.*, *passando por* q_0)



Esse esquema também pode ser apresentado assim



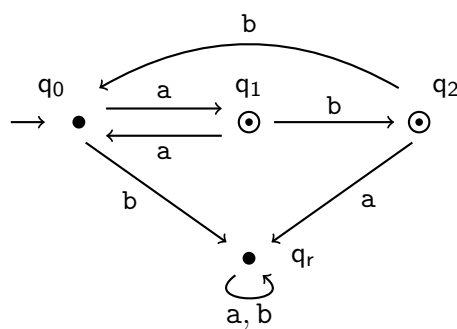
Finalmente, levando em conta os a 's que são lidos no início e no final da computação, nós podemos concluir que o autômato reconhece palavras da forma

$$\underbrace{a \dots a}_{\text{ímpar}} \underbrace{b \dots b}_{3x} \underbrace{a \dots a}_{\text{par}} \underbrace{b \dots b}_{3x} \underbrace{a \dots a}_{\text{par}} \underbrace{b \dots b}_{3x} \underbrace{a \dots a}_{\text{ímpar}}$$

◇

c. Múltiplos estados finais

Agora considere um diagrama com dois estados finais



Que palavras esse autômato aceita?

Bom, dessa vez é preciso analisar os caminhos que começam em q_0 e terminam em q_1 ou q_2 .

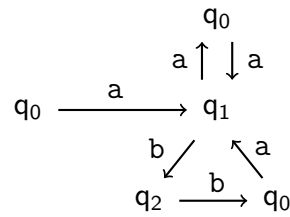
Mas nós podemos fazer as coisas em duas etapas.

Quer dizer, nós começamos analisando os caminhos que terminam em q_1 .

O caminho mais simples desse tipo é

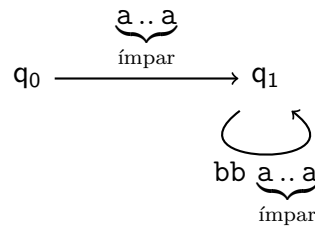
$$q_0 \xrightarrow{a} q_1$$

Esse caminho pode ficar mais complicado quando ocorrem voltas em torno de q_1



Daí, raciocinando em nível mais alto, nós observamos que o laço $q_1 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1$ forma blocos de a 's de tamanho par.

E com base nessa observação, nós redesenhamos o esquema assim



Portanto, os caminhos que terminam em q_1 correspondem a

→ sequências de blocos de a 's de tamanho ímpar
separados pelo fragmento bb

Agora, para analisar os caminhos que terminam em q_2 , nós fazemos uma pequena esperteza.

Quer dizer, nós observamos que esses caminhos são sempre um caminho que vai até q_1 e depois realiza a transição até q_2



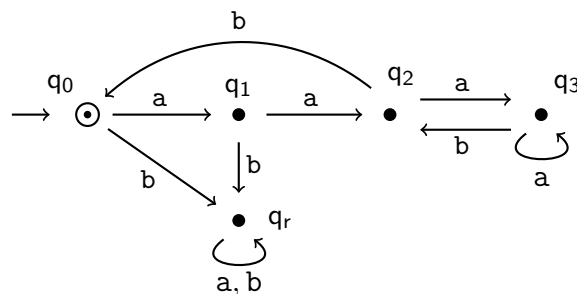
Logo, nós podemos dizer que o autômato aceita

→ sequências de blocos de a 's de tamanho ímpar separados pelo fragmento bb
seguidas (opcionalmente) pelo símbolo b

◇

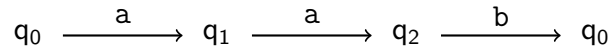
d. Laços aninhados

Considere o autômato abaixo



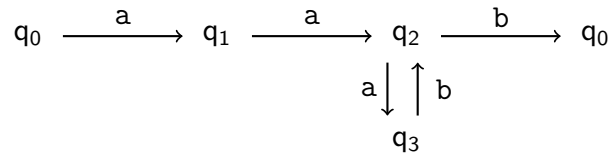
Que palavras esse autômato aceita?

A primeira observação é que o caminho mais simples que começa e termina em q_0 é

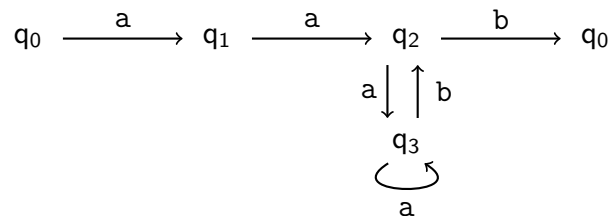


Esse caminho pode ficar mais complicado quando ocorrem laços em torno do estado q_2

— (passando pelo estado q_3)



E o caminho pode ficar mais complicado ainda quando ocorrem laços em torno de q_3



E agora?

Como é que nós podemos descrever as palavras que correspondem a esse esquema?

Bom, a ideia é a seguinte.

Nós podemos dizer primeiro que o autômato reconhece palavras formadas pela concatenação de blocos

$$a \ a \ x \ b$$

Quer dizer, isso corresponde ao caminho principal mais alguma coisa que acontece no meio.

Daí, a gente nota que o x corresponde a uma concatenação (possivelmente vazia) de blocos da forma

$$a \ y \ b$$

E daí, a gente nota que o y corresponde a um bloco qualquer de a 's (possivelmente vazio).

Ou seja, essa descrição em múltiplas etapas pode ser utilizada para analisar caminhos com *laços aninhados*.

Em seguida, a descrição pode ser ligeiramente simplificada notando que x é uma concatenação (possivelmente vazia) de blocos da forma

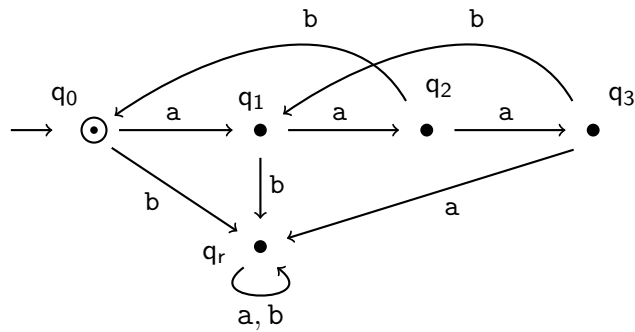
$$\underbrace{a \ \dots \ a}_{> 0} \ b$$

o que permite eliminar a variável y .

◇

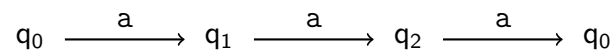
e. Laços entrelaçados

Considere o autômato abaixo



Que palavras esse autômato aceita?

Bom, o caminho mais simples que começa e termina em q_0 é



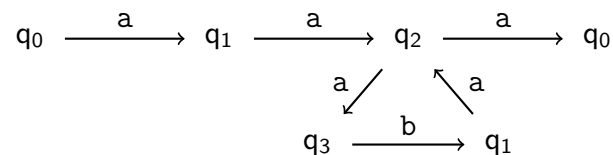
— (i.e., um laço)

E agora, nós precisamos adicionar o outro laço.

Só que dessa vez, nós temos duas possibilidades — (porque o outro laço passa por q_1 e por q_2)

Então nós vamos fazer as duas.

Quer dizer, tomando o estado q_2 como referência, o segundo laço é colocado no esquema assim

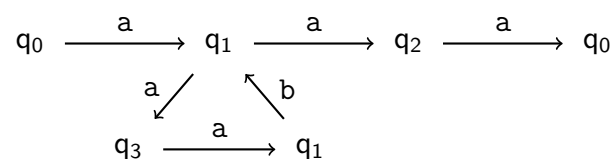


Daí, a gente descreve as palavras que o autômato aceita assim

- Uma concatenação de blocos que
- começam com o fragmento aa
- seguido por uma concatenação blocos aba
- seguido pelo símbolo a

Mas, essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Porque nós também podemos tomar o estado q_1 como referência para colocar o outro laço no esquema



E daí, a gente descreve as palavras que o autômato aceita assim

→ Uma concatenação de blocos que
começam com o símbolo a
seguido por uma concatenação blocos aba
seguido pelo fragmento aa

◇