

Teoria dos Autômatos e Linguagens Formais

aula 10: Removendo o não-determinismo do autômato

1 Introdução

Na aula passada nós resolvemos um problema e criamos outro.

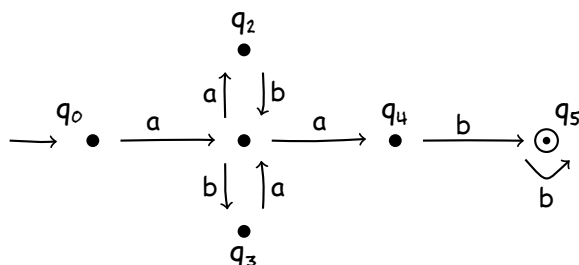
Quer dizer, nós encontramos uma maneira de transformar uma expressão regular em um autômato.

Mas o autômato é um autômato não-determinístico.

Então agora, a gente precisa descobrir como é que a gente transforma um autômato não-determinístico em um autômato determinístico.

E a melhor maneira de começar é examinando um exemplo concreto.

Considere o autômato não-determinístico

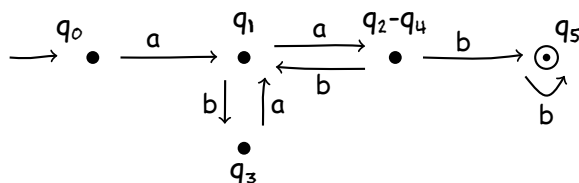


Aqui, nós vemos que existem duas transições com o símbolo a saindo de q_1 .

Isso significa que depois de ler um a em q_1 o autômato pode estar em q_2 ou q_4 .

E além disso, essa é a única maneira de chegar em q_2 e q_4 .

Então, a ideia é remover os estados q_2 e q_4 do diagrama, e incluir o *estado de dúvida* q_2 - q_4 — (que tem as transições de saída de q_2 e q_4)



Legal.

Isso removeu o não-determinismo de q_1 .

Mas agora, nós vemos não-determinismo em q_2 - q_4 : existem duas transições com o símbolo b saindo desse estado.

Então, a gente faz a mesma coisa outra vez.

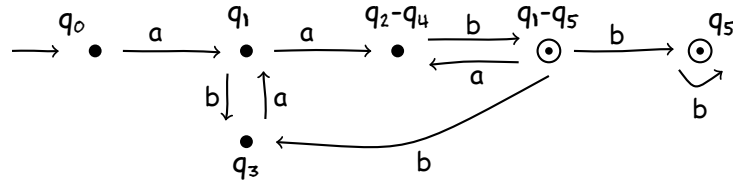
Quer dizer, depois de ler um b em q_2 - q_4 o autômato pode estar em q_1 ou q_5 .

Dessa vez, essa não é a única maneira de chegar em q_1 .

E também não é a única maneira de chegar em q_5 — (porque o autômato pode chegar lá vindo do próprio estado q_5)

Então, a gente mantém os dois estados no diagrama, e cria um novo estado de dúvida q_1-q_5 — (com as transições de saída de q_1 e q_5)

E como o estado q_5 é um estado final, nós marcamos o estado de dúvida como um estado final — (porque?)

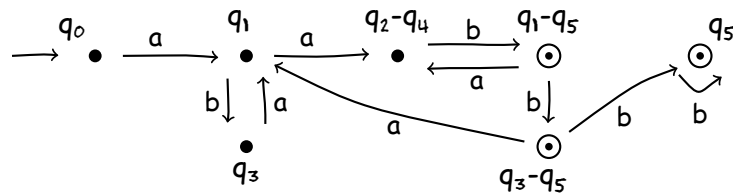


Legal.

Isso remove o não-determinismo do estado q_2-q_4 .

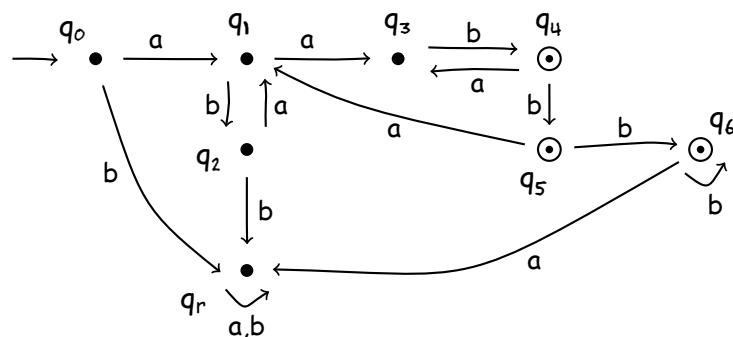
Mas agora, nós vemos não-determinismo no estado q_1-q_5 : existem duas transições com o símbolo b saindo desse estado.

Então, a gente faz a mesma coisa outra vez, criando o estado de dúvida q_3-q_5



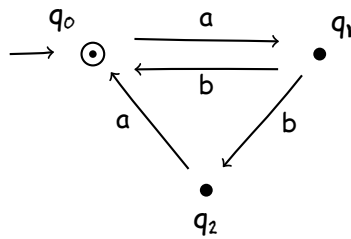
E agora acabou, porque já não há mais não-determinismo no autômato.

Então agora, a gente conclui a construção adicionando o estado de rejeição — (e renomeando os estados)



2 Removendo o não-determinismo do autômato

Considere o autômato não-determinístico abaixo



Nós já sabemos que esse autômato aceita as palavras

$$(ab \cup aba)^*$$

Agora, nós vamos ver o que acontece quando nós removemos o não-determinismo desse autômato.

Bom, o não-determinismo se encontra no estado q_1 : existem duas transições com o símbolo b saindo desse estado.

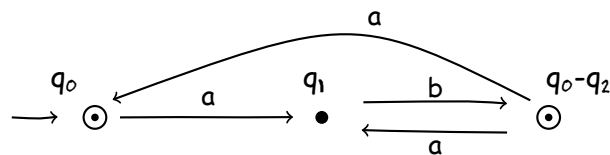
Isso significa que, depois de ler o símbolo b em q_1 o autômato pode estar em q_0 ou q_2 .

Além disso, essa é a única maneira de chegar em q_2 .

Mas não é a única maneira de chegar em q_0 — (*porque a computação começa ali*)

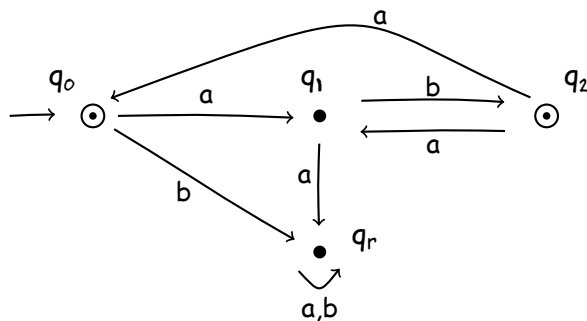
Então, nós removemos o estado q_2 do diagrama e criamos o estado de dúvida q_0-q_2 — (*com as transições de saída de q_0 e q_2*)

E como q_0 é um estado final, nós marcamos o novo estado como final



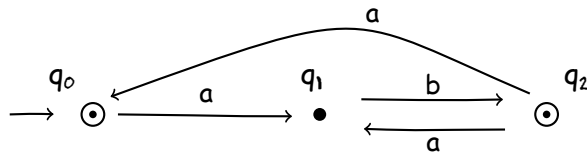
Esse autômato já não tem não-determinismo.

E nós completamos a sua construção adicionando o estado de rejeição — (*e renomeando os estados*)

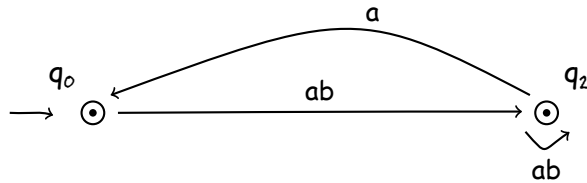


Que palavras esse autômato aceita?

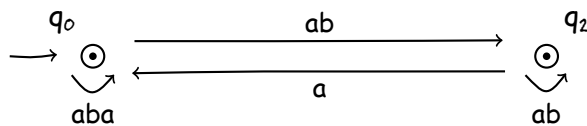
Bom, para descobrir isso nós removemos o estado de rejeição outra vez



Daí, nós removemos o estado q_1



E acrescentamos um laço em torno de q_0



Agora é fácil ver que esse diagrama representa as palavras

$$(ab \cup aba)^*$$

onde

- as palavras que terminam em **aba** são aceitas em q_0
- e as palavras que terminam em **ab** são aceitas em q_1

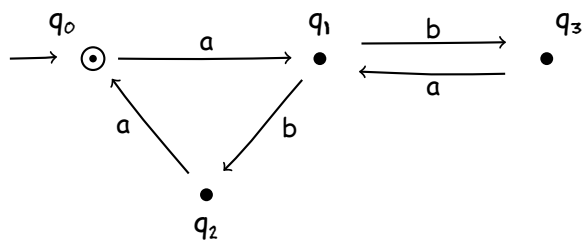
Legal, não é?

A seguir nós vamos ver mais exemplos.

Exemplos

a. Laço dentro de laço

Considere o autômato não-determinístico abaixo



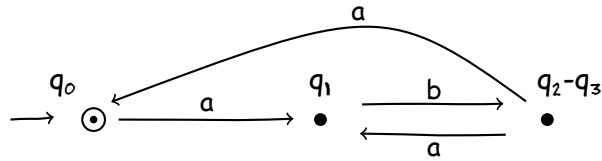
Não é difícil ver que esse autômato aceita as palavras

$$(a(ba)^*ba)^*$$

Agora, nós vamos ver o que acontece quando nós removemos o não-determinismo desse autômato.

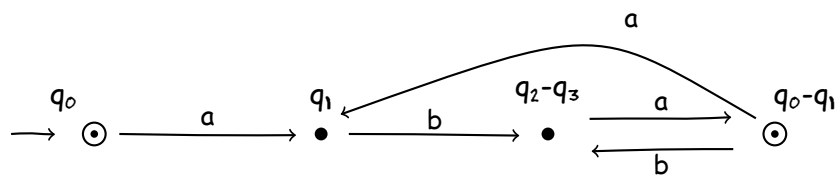
Bom, o não-determinismo está em q_1 .

E ele pode ser removido criando o estado de dúvida q_2-q_3 — (*removendo q_2 e q_3 do diagrama*)



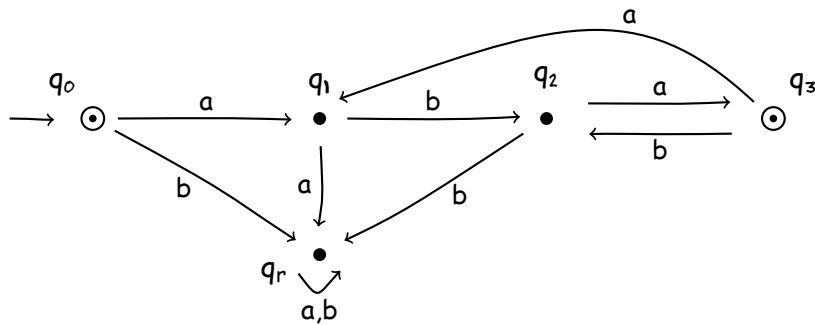
Agora, nós vemos não-determinismo em q_2-q_3 .

E ele pode ser removido criando o estado de dúvida q_0-q_1 — (*mantendo q_0 e q_1 no diagrama*)



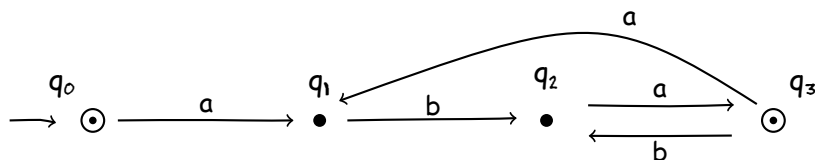
Aqui já não há mais não-determinismo.

E nós completamos a construção adicionando o estado de rejeição — (*e renomeando os estados*)

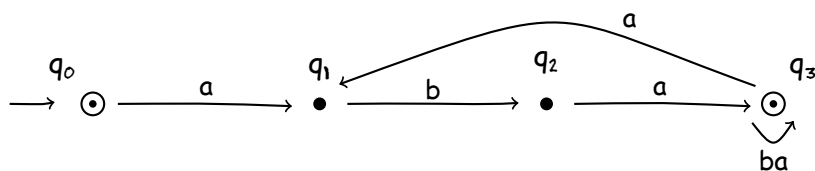


Que palavras esse autômato aceita?

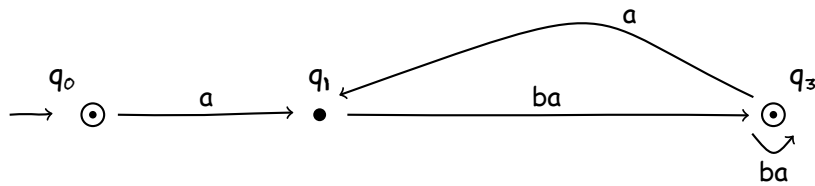
Bom, para descobrir isso a gente remove o estado de rejeição outra vez



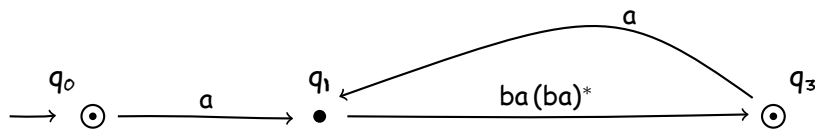
Daí, nós eliminamos a transição $q_3 \rightarrow q_2$ — (*criando um laço em torno de q_3*)



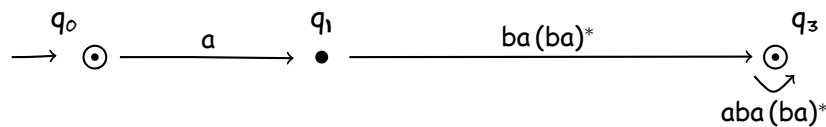
E eliminamos o estado q_2 do diagrama



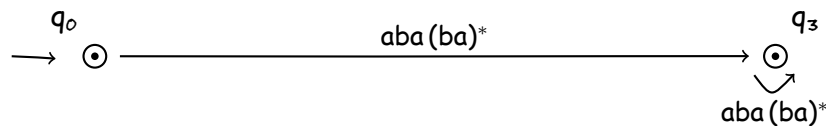
Nesse ponto, a gente move o laço em torno de q_3 para a transição $q_1 \rightarrow q_3$ — (*porque as voltas nesse laço acontecem depois dessa transição*)



Daí, a gente remove a transição $q_3 \rightarrow q_1$ — (*criando um laço em torno de q_3*)



E remove o estado q_1



Aqui já dá pra ver que o autômato aceita as palavras

$$\left(aba(ba)^* \right)^*$$

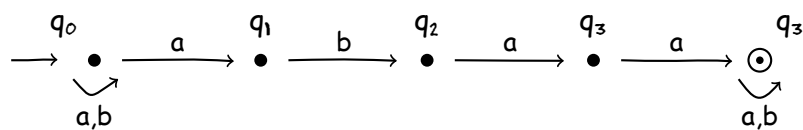
E não é difícil ver que

$$\left(aba(ba)^* \right)^* \equiv \left(a(ba)^*ba \right)^*$$

◇

b. Reconhecimento de padrão

Considere o autômato não-determinístico abaixo

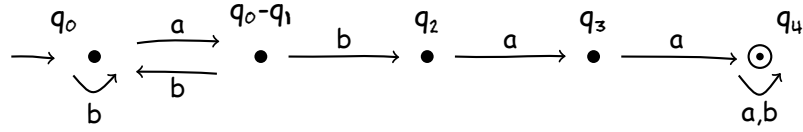


Esse autômato aceita as palavras que possuem o padrão **abaa**.

E agora, nós vamos ver o que acontece quando nós removemos o não-determinismo desse autômato.

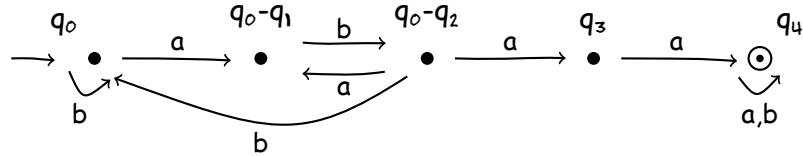
Bom, o não-determinismo se encontra no estado q_0 .

E ele pode ser removido criando o estado de dúvida q_0-q_1 — (com as transições de saída de q_0 e q_1)



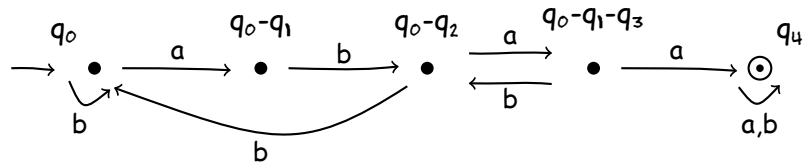
Agora, nós vemos não-determinismo em q_0-q_1 .

E ele pode ser removido criando o estado de dúvida q_0-q_2 — (com as transições de saída de q_0 e q_2)



Agora, nós vemos não-determinismo em q_0-q_2 .

E ele pode ser removido criando o estado de dúvida $q_0-q_1-q_3$ — (com as transições de saída de q_0-q_1 e q_3)



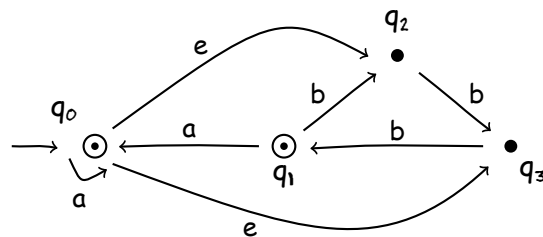
Aqui já não há mais não-determinismo.

E também não há a necessidade de um estado de rejeição — (porque todos os estados já tem as transições com a e b)

◇

3 Removendo as transições vazias

Considere o autômato não-determinístico abaixo



Não é difícil ver que esse autômato aceita

→ palavras que não possuem blocos de b 's com tamanho múltiplo de 3

— (as transições vazias adivinham se o próximo bloco de b 's tem tamanho $3k + 1$ ou $3k + 2$)

Para obter um autômato determinístico que faz a mesma coisa, primeiro é preciso remover as suas transições vazias.

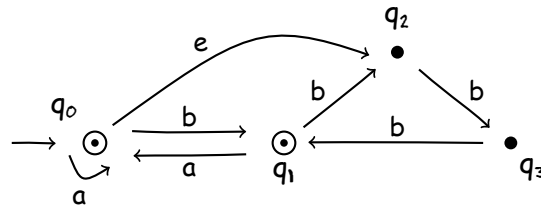
E nós começamos com a transição $q_0 \xrightarrow{e} q_3$.

A observação chave é que essa transição vazia permite que o autômato leia o símbolo b quando ele se encontra no estado q_0

$$q_0 \xrightarrow{e} q_3 \xrightarrow{b} q_1$$

Além disso, essa é a única possibilidade oferecida por essa transição vazia.

Então, nós podemos remover a transição vazia do diagrama adicionando a transição $q_0 \xrightarrow{b} q_1$



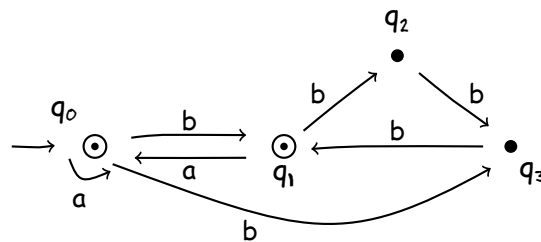
Agora, nós consideramos a transição $q_0 \xrightarrow{e} q_2$.

E observamos que essa transição vazia dá outra possibilidade ao autômato de ler o símbolo b no estado q_0

$$q_0 \xrightarrow{e} q_2 \xrightarrow{b} q_3$$

Além disso, essa é a única possibilidade oferecida por essa transição vazia.

Então, nós podemos remover a transição vazia do diagrama adicionando a transição $q_0 \xrightarrow{b} q_3$



Agora, nós podemos remover o não-determinismo do autômato utilizando as ideias da seção anterior.

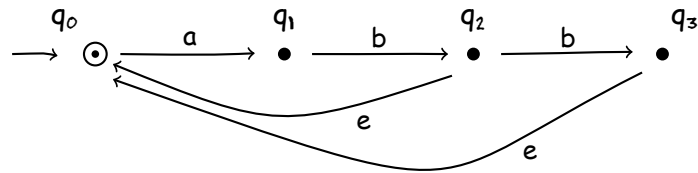
Mas isso será deixado como exercício.

A seguir nós vamos ver mais exemplos.

Exemplos

a. Transições vazias para o estado final

Considere o autômato não-determinístico



É fácil ver que esse autômato aceita as palavras

$$(ab \cup abb)^*$$

Para obter um autômato determinístico que faz a mesma coisa, primeiro é preciso remover as suas transições vazias.

Nós começamos com a transição $q_2 \xrightarrow{e} q_0$.

E observamos que dessa vez essa transição vazia dá duas possibilidades ao autômato

1. ler o símbolo **a** no estado q_2

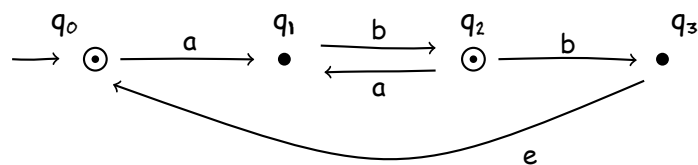
$$q_2 \xrightarrow{e} q_0 \xrightarrow{a} q_1$$

2. aceitar a palavra de entrada no estado q_2 — (*passando para q_0*)

$$q_2 \xrightarrow{e} q_0$$

Então dessa vez, é preciso fazer duas coisas para remover a transição vazia do diagrama

- adicionar a $q_2 \xrightarrow{e} q_1$
- marcar o estado q_2 como final



Agora, nós consideramos a transição $q_3 \xrightarrow{e} q_0$.

Mais uma vez, essa transição vazia dá duas possibilidades ao autômato

1. ler o símbolo **a** no estado q_3

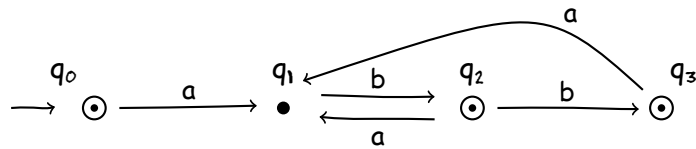
$$q_3 \xrightarrow{e} q_0 \xrightarrow{a} q_1$$

2. aceitar a palavra de entrada no estado q_3 — (*passando para q_0*)

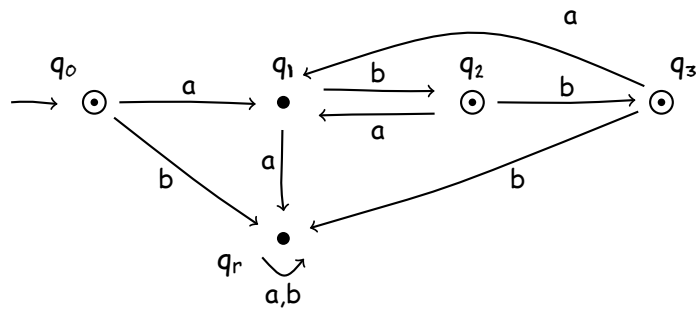
$$q_3 \xrightarrow{e} q_0$$

Então mais uma vez, é preciso fazer duas coisas para remover a transição vazia do diagrama

- adicionar a $q_3 \xrightarrow{e} q_1$
- marcar o estado q_3 como final



A boa notícia é que dessa vez o autômato já não tem mais não-determinismo. Então, nós podemos concluir a construção adicionando o estado de rejeição



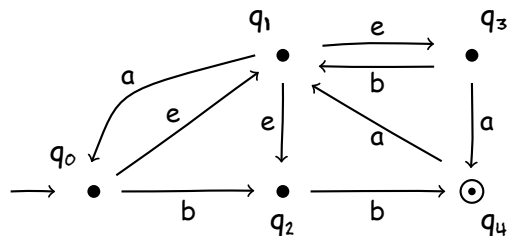
E aqui não é tão difícil ver que esse autômato aceita as palavras

$$(ab \cup abb)^*$$

◇

b. Caminhos vazios

Considere o autômato não-determinístico



Aqui não é fácil dizer o que esse autômato faz.

Mas, nós podemos remover as suas transições vazias mesmo assim.

A novidade desse autômato é que ele tem caminhos vazios

$$q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{e} q_2$$

Mas, fazendo as coisas com cuidado, nós não precisamos nos preocupar com isso.

Quer dizer, considere primeiro a transição $q_0 \xrightarrow{e} q_1$.

Essa transição vazia dá três possibilidades ao autômato

1. ler o símbolo **a** no estado q_0 — (*permanecendo em q_0*)

$$q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{a} q_0$$

2. passar para o estado q_2 sem ler símbolo nenhum

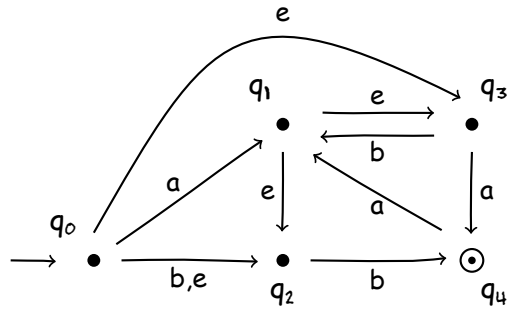
$$q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{e} q_2$$

3. passar para o estado q_3 sem ler símbolo nenhum

$$q_0 \xrightarrow{e} q_1 \xrightarrow{e} q_3$$

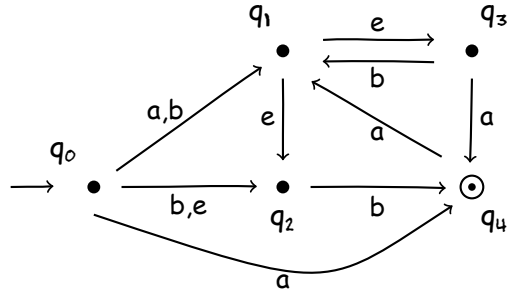
Então dessa vez, é preciso fazer três coisas para remover a transição do diagrama

- adicionar um laço em torno de q_0
- adicionar a transição $q_0 \xrightarrow{e} q_2$.
- adicionar a transição $q_0 \xrightarrow{e} q_3$.



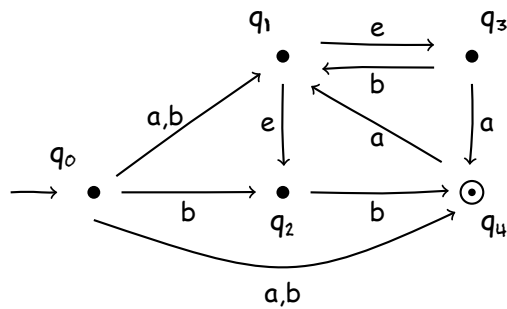
A seguir, para remover a transição $q_0 \xrightarrow{e} q_3$ do diagrama, nós

- adicionamos a transição $q_0 \xrightarrow{a} q_4$.
- adicionamos a transição $q_0 \xrightarrow{b} q_1$.



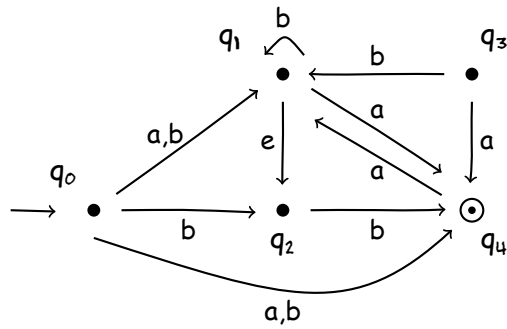
A seguir, para remover a transição $q_0 \xrightarrow{e} q_2$ do diagrama, nós

- adicionamos a transição $q_0 \xrightarrow{b} q_4$.



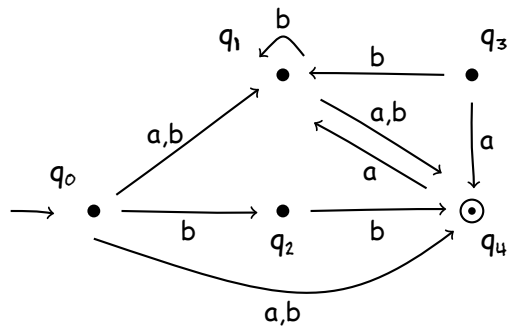
A seguir, para remover a transição $q_1 \xrightarrow{e} q_3$ do diagrama, nós

- adicionamos a transição $q_1 \xrightarrow{a} q_4$.
- adicionamos o laço $q_1 \xrightarrow{b} q_1$.

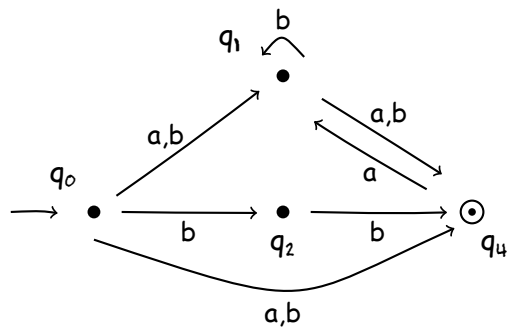


Finalmente, para remover a transição $q_1 \xrightarrow{e} q_2$ do diagrama, nós

- adicionamos a transição $q_1 \xrightarrow{b} q_4$.



E aqui nós vemos que o estado q_3 pode ser removido também — (*porque?*)



— (*O que é que esse autômato faz?*)