

A linguagem DOB

Considere a linguagem

DOB : palavras onde o número de a 's é o dobro do número de b 's

Por exemplo,

$aab, \quad aba, \quad baa, \quad aabb aa, \quad aaabaaabb, \quad etc$

Dessa vez, as palavras da linguagem não possuem um padrão bem definido.

Mas, isso não importa.

Porque nós só precisamos de um contra-exemplo — *(porque o autômato precisa dar a resposta correta para todas as palavras de entrada, para reconhecer a linguagem)*

Então, nós vamos concentrar a atenção em palavras da forma

$$\underbrace{aaaa \dots aaaa}_{2x} \underbrace{bb \dots bb}_x$$

Agora, imagine que o autômato M reconhece a linguagem DOB .

E imagine que M tem k estados.

Daí, a gente aplica o nosso truque

$$\underbrace{aaaa \dots aaaa}_{2k} \underbrace{bb \dots bb}_k \longrightarrow \boxed{M}$$

Aqui, nós sabemos que

- i. o autômato vai responder SIM — *(porque?)*
- ii. o autômato vai passar duas vezes pelo mesmo estado, durante a leitura do bloco de a 's — *(porque $2k$ é maior do que k)*

Colocando o loop em foco, a gente vê o seguinte

$$\begin{array}{c} \ell \text{ símbolos} \\ a a \dots \boxed{a a \dots a} a \dots a a \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ q_i \qquad \qquad q_i \end{array}$$

Isso significa que o autômato também aceita a palavra

$$\begin{array}{c} \text{bombeando } \ell \text{ a's} \\ \Downarrow \\ a a a \dots \boxed{a \dots a} \dots a a a \underbrace{bb \dots bb}_k \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{2k+\ell} \end{array}$$

Só que, a palavra $a^{2k+\ell} b^k$ não está na linguagem DOB .

Logo, nós temos uma contradição.

Logo, a linguagem DOB não é regular.