

A linguagem $a^n b^n$, e suas variantes

Abaixo nós temos a gramática da linguagem $a^n b^n$

1. $S \rightarrow a S b$
2. $S \rightarrow e$

que pode ser apresentada de maneira ainda mais sucinta como

$$S \rightarrow a S b \mid e$$

(isto é, a variável S pode ser substituída por aSb ou e)

A primeira variante da linguagem $a^n b^n$ que nós vamos considerar é a linguagem

$$a^n b^{2n}$$

que pode ser gerada pela gramática

$$S \rightarrow a S bb \mid e$$

A seguir, nós consideramos a variante

$$a^n b^m, \text{ onde } n = 2m \text{ ou } m = 2n$$

Isto é, aqui nós temos o conjunto de palavras da forma $a..ab..b$, onde um dos blocos tem o dobro do tamanho do outro.

Uma ideia seria ter uma gramática para cada caso

$$\begin{array}{l} S_1 \rightarrow aa S_1 b \mid e \\ S_2 \rightarrow a S_2 bb \mid e \end{array}$$

E a seguir nós adicionamos a regra

$$S \rightarrow S_1 \mid S_2$$

(Em certo sentido, aqui nós temos uma gramática definida como a união de duas gramáticas mais simples.)

A próxima variante que nós vamos considerar é a seguinte

$$a^n b^m, \text{ onde } \frac{n}{2} \leq m \leq 2n$$

Uma primeira ideia para obter a gramática que gera essa linguagem seria aplicar alternadamente as regras

$$\begin{array}{l} S_1 \rightarrow aa S_1 b \mid e \\ S_2 \rightarrow a S_2 bb \mid e \end{array}$$

E uma maneira simples de conseguir isso é

$$\begin{array}{l} S \rightarrow S_1 \mid S_2 \mid e \\ S_1 \rightarrow aa S b \\ S_2 \rightarrow a S bb \end{array}$$

Por exemplo, a palavra $aaabbb$ seria derivada da seguinte maneira

$$S \implies S_1 \implies a S bb \implies a S_2 bb \implies aaa S bbb \implies aaabbb$$

Mas, essa gramática não é capaz de produzir, por exemplo, as palavras ab e $aabb$.

Abaixo nós temos uma solução simples para esse problema

$$\begin{array}{l} S \rightarrow S_1 \mid S_2 \mid S_3 \mid e \\ S_1 \rightarrow aa S b \\ S_2 \rightarrow a S bb \\ S_3 \rightarrow a S b \end{array}$$

Finalmente, a última variante que nós vamos considerar é a seguinte

$$a^n b^m, \text{ onde } m > n$$

Aqui nós podemos raciocinar de duas maneiras.

A primeira delas consiste em ver as palavras dessa linguagem como a concatenação

$$(a^n b^n) b^k, \text{ onde } k > 0$$

E daí nós obtemos a gramática

$$\begin{array}{l} S \rightarrow S_1 B \\ S_1 \rightarrow a S b \mid e \\ B \rightarrow b B \mid b \end{array}$$

A segunda maneira consiste em ver as palavras da linguagem como

$$a^n (b^k) b^n, \text{ onde } k > 0$$

E daí nós obtemos a gramática

$$\begin{array}{l} S \rightarrow a S b \mid B \\ B \rightarrow b B \mid b \end{array}$$