

A linguagem dos primos

Considere a linguagem

$$L_p = \{a^p\}, \text{ onde } p \text{ é um número primo}$$

Suponha por um momento que L_p é uma linguagem livre de contexto, e considere a palavra $w = a^p$, onde p é um número primo muito grande.

Então, de acordo com o Teorema 1, é possível decompor a palavra w como

$$w = uvxyz$$

de modo que uv^kxy^kz também pertence à linguagem L_p para todo $k \geq 0$.

Por outro lado, como w contém apenas o símbolo a , nós sabemos que

$$u = a^i \quad v = a^j \quad x = a^1 \quad y = a^m \quad z = a^n$$

onde $j + m > 0$.

Tomando $k = (i + l + n)$, segue que

$$\begin{aligned} uv^kxy^kz &= a^i a^{j(i+l+n)} a^l a^{m(i+l+n)} a^n \\ &= a^{(i+l+n)} a^{(1+j+m)} \end{aligned}$$

também pertence à linguagem L_p .

Mas isso é uma contradição, pois $(i + l + n)(1 + j + m)$ claramente é um número composto.

Logo, L_p não é uma linguagem livre de contexto.

◇