

Matemática Discreta

aula 01: Jogos de montar e desmontar

1 Introdução

— *Nós vamos começar a disciplina de matemática discreta calculando a soma*

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

— *Mas o que é isso?*

— *Isso o que?*

— *Esse n aí no final ...*

— *Isso é um número.*

— *Que número?*

— *Qualquer um ...*

— *Como assim?*

— *Bom, me diga um número aí ...*

— *4*

— *Certo, então a soma é a seguinte*

$$1 + 2 + 3 + 4$$

Agora diga outro.

— *6*

— *Então agora a soma é essa aqui*

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

— *Então eu preciso dizer qual é o valor de n .*

— *Não, a gente vai fazer a conta com o n mesmo*

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

— *Porque?*

— *Ora, porque a gente consegue fazer as coisas assim ...*

— *Mas pra que?*

— *Bom, a gente vai ver isso daqui a pouquinho.*

2 Jogos de montar e desmontar

Aqui está a nossa soma outra vez

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

E o truque mais velho do mundo para calcular essa soma é o seguinte

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\
 + & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
 \hline
 (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1)
 \end{array}$$

Quer dizer, a gente escreveu a soma outra vez, ao contrário, embaixo da soma original.

E ao somar as colunas, todas as parcelas ficaram iguais.

Daí, como são n parcelas no total, a coisa toda dá

$$n \cdot (n+1)$$

Só que isso é o valor de duas somas.

Mas as duas somas são a mesma coisa.

Logo, a nossa soma vale

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Legal, não é?

2.1 Variantes do truque

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, agora imagine que n é par.

Então nesse caso, o $n/2$ é um número inteiro

E ele aparece no meio da nossa soma

$$1 + 2 + \dots + \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \dots + n$$

Na verdade, ele aparece bem no meio.

E cortando a soma nesse ponto, a gente divide ela em duas metades iguais — (*com o mesmo número de parcelas ...*)

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & + & 2 & + & \dots & + & \frac{n}{2} & + & \left(\frac{n}{2} + 1\right) & + & \dots & + & n \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & & & \vdots & & & &
 \end{array}$$

Agora a gente aplica o truque outra vez, escrevendo a segunda metade (ao contrário) embaixo da primeira

$$\begin{array}{cccccccc}
 1 & + & 2 & + & \dots & + & \frac{n}{2} \\
 + & n & + & (n-1) & + & \dots & + & \frac{n}{2} + 1 \\
 \hline
 (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1)
 \end{array}$$

Ficou tudo igual outra vez.

Só que dessa vez, são $n/2$ parcelas no total

$$\frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

— (*o que é uma coisa que a gente já sabia ...*)

Legal, não é?

Bom, ainda não.

Porque esse truque só funciona quando n é par.

Então agora, a gente imagina que o n é ímpar.

Quando o n é ímpar, não dá pra quebrar a soma no meio — (*porque?*)

Mas a gente sabe que tem um elemento que fica bem no meio

$$1 + 2 + \dots + \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \textcircled{?} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \dots + (n-1) + n$$

Quem é ele?

Bom, agora a gente precisa raciocinar.

Quer dizer, como esse é o número que fica no meio, nos dois lados nós temos a mesma quantidade de termos

$$\underbrace{1 + 2 + \dots + \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array}}_{k \text{ termos}} \textcircled{?} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \underbrace{\dots + (n-1) + n}_{k \text{ termos}}$$

— (*como a gente não sabe a quantidade de termos, a gente diz que isso é um número qualquer ...*)

Certo.

Então agora dá pra ver que a quantidade total de termos é

$$k + 1 + k$$

Só que a quantidade total de termos é n .

Logo, a gente pode escrever

$$k + 1 + k = n$$

E algumas poucas continhas nos dão

$$k = \frac{n-1}{2}$$

Então, existem $(n-1)/2$ elementos do lado esquerdo

$$1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2} + \text{?} + \dots + (n-1) + n$$

Ora, mas agora a gente já sabe quem está no meio

$$1 + 2 + \dots + \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} + \dots + (n-1) + n$$

E agora, é só aplicar o nosso truque outra vez

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & \frac{n-1}{2} & + & \frac{n+1}{2} & & \\ + & n & + & (n-1) & + & \dots & + & \frac{n+3}{2} & & & \\ \hline & & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & \frac{n+1}{2} \end{array}$$

E depois a gente faz a conta

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{2} \cdot (n+1) + \frac{n+1}{2} &= \frac{n+1}{2} \cdot (n-1+1) \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \end{aligned}$$

— (o que é uma coisa que a gente já sabia)

Não é legal?

3 O truque do triângulo

Sim, mas vamos olhar para a soma outra vez

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

Porque a gente ainda não viu tudo o que tinha pra ver.

Mas, o que é que ainda tem para ver aqui?

Bom, a gente pode ver que

- o 2 é igual a 1 + 1
- e o 3 é igual a 1 + 2
- e o 4 é igual a 1 + 3
- e por aí vai ...

Daí que, a gente pode reescrever a soma assim

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n & = & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \dots & + & 1 \\ & & & & & & & & & & & + & 1 & + & 2 & + & \dots & + & n-1 \end{array}$$

Quer dizer, a nossa soma apareceu do lado direito outra vez — (*ou quase ...*)

Então a gente pode passar ela para o outro lado

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

$$- 1 - 2 - 3 - \dots - (n-1)$$

o que dá

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ cópias do } 1}$$

Só que isso é uma coisa que todo mundo sabe — (*ou será que não?*)

E isso é uma coisa que não serve pra nada — (*ou será que serve?*)

Bom, o que isso está dizendo é que nós podemos desmontar um número (n) em uma ruma de 1's.

E fazendo isso, a gente desmonta a nossa soma assim

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

$$+ 1 + 1 + \dots + 1$$

$$+ 1 + \dots + 1$$

$$\vdots$$

$$+ 1$$

Sim, um triângulo!

E dois triângulos formam um retângulo

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \dots & + & 1 \\
 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \dots & + & 1 \\
 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & + & \dots & + & 1 \\
 \vdots & & & & & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\
 1 & + & 1 & + & 1 & + & \dots & + & 1 & + & 1
 \end{array}$$

$n+1$

n

Daí, todo mundo sabe que a área do retângulos é igual à base vezes a altura

$$n \cdot (n + 1)$$

— (*só que isso não funciona para o triângulo — porque?*)

E daí, como o retângulo é igual a dois triângulos, a gente descobre que o triângulo vale

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

— (o que é uma coisa que a gente já sabia ...)

Legal, não é?

3.1 Virando o truque do avesso

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, vamos olhar para a nossa soma outra vez

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

Só que dessa vez, a gente coloca a atenção no lado direito.

E o que é que a gente vê ali?

Bom, a gente vai vendo isso aqui

$$\dots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n$$

Quer dizer, todo mundo é o n menos alguma coisa

Daí, voltando para o lado esquerdo, a gente vê que

- o 3 é igual a n menos $n-3$
- o 2 é igual a n menos $n-2$
- e o 1 é igual a n menos $n-1$

Daí que, a gente pode reescrever a nossa soma assim

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = (n - (n-1)) + (n - (n-2)) + \dots + (n-1) + n$$

Daí, a gente desmonta o lado direito assim

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= n + n + \dots + n + n \\ &\quad - (n-1) - (n-2) - \dots - 1 \end{aligned}$$

e depois a gente reescreve a coisa assim

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= n + n + n + \dots + n \\ &\quad - (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) \end{aligned}$$

Quer dizer, a nossa soma apareceu no lado direito outra vez — (ou quase ...)

Só que dessa vez, a soma apareceu com o sinal negativo.

Então, a gente passa ela para o outro lado

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n & & = & n & + & n & + & n & + & \dots & + & n \\
 & & & & & & & & & + & (1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1))
 \end{array}$$

Adiciona n dos dois lados

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n & & = & n & + & n & + & n & + & \dots & + & n & + & n \\
 & & & & & & & & + & (1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1)) & + & n
 \end{array}$$

Reescreve a coisa assim

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = n \cdot (n+1)$$

e depois assim

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

— *(o que é uma coisa que a gente já sabia ...)*

4 A estrutura do raciocínio matemático

A gente acabou de ver um monte de maneiras de ver que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

E agora, a gente pode usar isso como uma regra

$1 + 2 + 3 + \dots + n \longrightarrow \frac{n(n+1)}{2}$
--

Quer dizer, imagine que alguém pergunta

— *Quanto vale $1 + 2 + 3 + \dots + 20$?*

Daí, você pode responder

— *Bom, eu não sei ...*

Mas eu posso usar a minha regra para descobrir

$$1 + 2 + 3 + \dots + 20 \quad \quad \quad \frac{20(20+1)}{2} = 210$$

$n = 20$ ↘

↗

$1 + 2 + 3 + \dots + n \longrightarrow \frac{n(n+1)}{2}$
--

Sim! a nossa regra é uma fórmula.

E sim! a gente faz a conta com um número qualquer (n) porque no final isso nos dá uma fórmula.

Legal, não é?

Sim, mas isso ainda não é tudo.

Quer dizer, imagine agora que a pergunta é

— *Quanto vale* $2 + 4 + 6 + \dots + 200$?

Bom, dessa vez a gente vai precisar raciocinar um pouquinho.

Porque dessa vez, essa não é a nossa soma.

Mas, quem disse que não é?

Quer dizer, todos os números são pares.

Logo, a gente pode raciocinar assim

$$\begin{array}{ccc} 2 + 4 + 6 + \dots + 200 & ? & \\ \Rightarrow 2 \cdot \underbrace{(1 + 2 + 3 + \dots + 100)}_{n=100} & & 2 \cdot \left(\frac{100(100+1)}{2} \right) = 10100 \\ & \downarrow & \uparrow \\ & \boxed{1 + 2 + 3 + \dots + n \longrightarrow \frac{n(n+1)}{2}} & \end{array}$$

Legal, não é?

Sim, mas ainda tem mais.

Quer dizer, imagine agora que a pergunta é

— *Quanto vale* $8 + 11 + 14 + \dots + 68 + 71 + 74$?

Bom, dessa vez a gente vai precisar raciocinar um pouquinho mais.

Porque dessa vez a soma é bem diferente.

Mas, quem disse que a soma é bem diferente?

Quer dizer, a gente pode começar notando que os números vão pulando de 3 em 3

$$\begin{array}{ccccccc} & \overset{3}{\frown} & & \overset{3}{\frown} & & & \overset{3}{\frown} & \overset{3}{\frown} \\ 8 & + & 11 & + & 14 & + & \dots & + & 68 & + & 71 & + & 74 \end{array}$$

Então, a gente pode reescrever o começo da soma assim

$$8 + (8 + 1 \cdot 3) + (8 + 2 \cdot 3) + (8 + 3 \cdot 3) + \dots$$

E no final da soma é a mesma coisa.

Quer dizer, todo mundo é 8 mais uma certa quantidade de pulos de tamanho 3.

Só que, a gente não sabe que quantidade é essa.

Então a gente diz que isso é uma quantidade qualquer

$$8 + k \cdot 3$$

Daí, a gente olha para o último termo

$$8 + k \cdot 3 = 74$$

E uma pequena continha nos dá

$$k = 22$$

Agora, nós podemos escrever a soma completa

$$8 + (8 + 3) + (8 + 2 \cdot 3) + \dots + (8 + 22 \cdot 3)$$

E agora, nós podemos usar a nossa regra

$$8 + 11 + 14 + \dots + 74 \quad ?$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 8 & + & 8 & + & 8 & + & \dots & + & 8 \\ & & + & 1 \cdot 3 & + & 2 \cdot 3 & + & \dots & + & 22 \cdot 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow 23 \cdot 8 + 3 \cdot \underbrace{(1 + 2 + 3 + \dots + 22)}_{n=22} \qquad 23 \cdot 8 + 3 \cdot \left(\frac{22(22+1)}{2} \right) = 943$$

$$n = 22 \quad \downarrow$$

$$\uparrow$$

$1 + 2 + 3 + \dots + n \quad \longrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2}$
--

Legal, não é?