

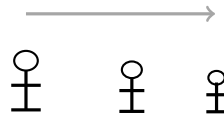
Matemática Discreta

aula 05: O problema do chapéu

1 Introdução

Três homens estão em fila, o mais alto de todos atrás, e o mais baixo na frente.

Os três olha para frente



Em uma caixa existem 3 chapéus pretos e 2 chapéus vermelhos.

Alguém escolhe 3 chapéus e coloca na cabeça dos homens.

Nenhum deles vê o chapéu que está na sua cabeça, mas vê o chapéu daqueles que estão à sua frente.

Daí uma pessoa pergunta: “*Quem sabe a cor do seu chapéu?*”

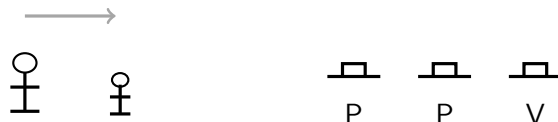
Depois de algum tempo o baixinho diz: “*Acho que eu já sei ...*”.

Como é que ele sabe?

Dica: Imagine que são apenas 2 homens e 3 chapéus na caixa.

Solução:

Bom, a melhor coisa a fazer é seguir a dica



Daí, a gente nota que se o grandão vê o chapéu vermelho na cabeça do baixinho, então ele já sabe que o seu chapéu é preto.

Mas o grandão não falou nada.

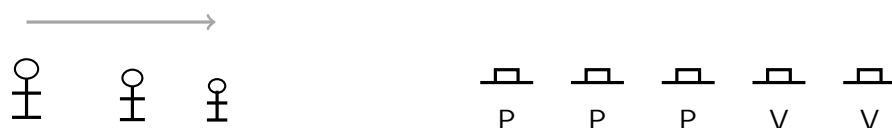
Foi isso o que o baixinho percebeu.

Então o grandão está vendo um chapéu preto.

E é isso o que leva o baixinho a dizer: “*Acho que eu já sei*”.

Legal.

Agora nós podemos considerar a situação do problema



Aqui a lógica é a mesma.

Quer dizer, se o grandão vê dois chapéus vermelhos, então ele já sabe que o seu chapéu é preto.

Mas o grandão não falou nada.

E o segundo homem na fila percebeu isso.

Daí que, se o segundo homem vê um chapéu vermelho, então ele já sabe que o seu chapéu é preto.

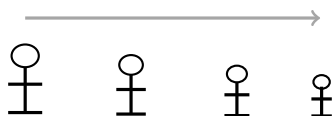
Mas o segundo homem não disse nada.

O baixinho percebeu isso.

E é isso o que leva o baixinho a dizer: “*Acho que eu já sei*”.

1.1 Aumentando o problema do chapéu

Agora imagine que são quatro homens.



E imagine que a caixa contém 4 chapéus pretos e 3 chapéus vermelhos.

A situação é a mesma, e alguém pergunta: “*Você sabe a cor do seu chapéu?*”

Mais uma vez, apenas o baixinho advinha a cor do seu chapéu.

Como é que ele sabe?

Solução:

Agora esse problema não tem mais graça.

Quer dizer, é sempre a mesma coisa — (*a mesma forma de pensar*)

E a gente pode apresentar o raciocínio de forma esquemática

- O grandão não diz nada, porque ele vê no máximo dois chapéus vermelhos — (*senão ele dizia*)
- O segundo homem percebe isso mas ele não diz nada, porque ele vê no máximo 1 chapéu vermelho — (*senão ele dizia*)
- O terceiro homem percebe isso mas ele não diz nada, porque ele vê nenhum chapéu vermelho — (*senão ele dizia*)
- O baixinho percebe isso, e é isso o que o leva a dizer: “*Acho que eu já sei*”.

Agora que a gente tem o raciocínio esquemático, é fácil mudar a historinha.

Quer dizer, imagine que o terceiro homem advinha a cor do seu chapéu primeiro.

Isso significa que ele está vendo um chapéu vermelho na cabeça do baixinho.

O baixinho percebe isso.

E dessa maneira, o baixinho também descobre qual é a cor do seu chapéu.

Daí, se é o segundo quem advinha primeiro, então logo em seguida todos os que vem depois dele advinham também.

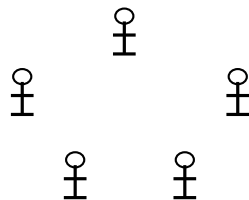
É assim que a coisa funciona.

2 O problema do chapéu na roda

Agora imagine que são 5 homens.

E imagine que a caixa contém 5 chapéus pretos e 4 chapéus vermelhos.

Dessa vez, os homens estão em roda olhando uns para os outros



A situação ainda é a mesma, e alguém pergunta: “*Você sabe a cor do seu chapéu?*”

Depois de algum tempo todos dizem: “Sim, eu já sei”.

Como é que eles sabem?

Dica: Lembre da dica.

Solução:

E seguindo a dica outra vez, a gente começa com a roda de duas pessoas



— (*uma roda com duas pessoas é uma roda?*)

Bom, nessa situação, se alguém vê o chapéu vermelho na cabeça do outro, então ele já sabe que o seu chapéu é preto.

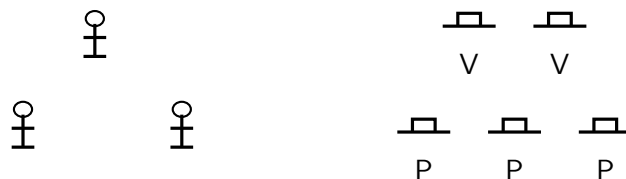
Mas ninguém fala nada imediatamente.

Os dois percebem isso.

E então, os dois dizem ao mesmo tempo: “*Acho que eu já sei*”.

Legal.

Agora considere a roda com 3 pessoas



E daí, a gente raciocina da mesma maneira.

Quer dizer, se alguém vê dois chapéus vermelhos, então ele já sabe que o seu chapéu é preto.

Mas, ninguém fala nada imediatamente.

E todos percebem isso.

Daí, se alguém vê um chapéu vermelho, então ele já sabe que o seu chapéu é preto.

Mas, ninguém fala nada outra vez.

E todos percebem isso outra vez.

Então, todos dizem ao mesmo tempo: “*Acho que eu já sei*”.

Certo.

Aqui já dá pra ver a forma do raciocínio — (*a estrutura lógica*)

E a gente pode apresentar o raciocínio esquemático para a roda com 4 pessoas

- Se alguém vê 3 chapéus vermelhos, então ele já sabe que o seu chapéu é preto. Mas ninguém fala nada. Logo, todos descobrem que existem no máximo 2 chapéus vermelhos na roda.
- Dai, se alguém vê 2 chapéus vermelhos, então ele já sabe que o seu chapéu é preto. Mas ninguém fala nada. Logo, todos descobrem que existe no máximo 1 chapéu vermelho na roda.
- Dai, se alguém vê 1 chapéu vermelho, então ele já sabe que o seu chapéu é preto. Mas ninguém fala nada. Logo, todos descobrem que não existem chapéus vermelhos na roda.
- E nesse momento, todos dizem: “*Acho que eu já sei*”.

Sim, a coisa é repetitiva.

E basta adicionar mais um passo (no início) para obter um raciocínio esquemático para o problema com 5 pessoas.

Então agora, a gente já sabe resolver o problema para qualquer tamanho da roda.

2.1 Enrolada (opcional)

No dia seguinte, os 5 homens são convidados para jogar o jogo outra vez.

O ponto é que ele já raciocinaram sobre o jogo — (*e já conhecem a sua estrutura lógica*)

Imagine que todos eles tem um chapéu preto na cabeça.

Então, todos eles sabem que existem 4 chapéus pretos na roda — (*talvez 5 ...*)

Será que sabendo disso eles conseguem raciocinar mais rápido?

Bom, vamos ver.

Ninguém fala nada imediatamente, porque ninguém sabe a cor do seu próprio chapéu.

E agora nós vamos seguir os pensamentos do baixinho — (*todos os outros estão pensando a mesma coisa*)

O baixinho imagina que os outros podem estar vendo um chapéu vermelho na sua cabeça.

E daí, como ninguém sabe a cor do seu próprio chapéu, ele podem imaginar que existem 2 chapéus vermelhos na roda.

Quer dizer, o baixinho sabe que existe no máximo 1 chapéu vermelho na roda — (*e os outros também sabem disso*)

Mas o baixinho não sabe que os outros sabem disso.

Em particular, o baixinho pode imaginar que o grandão imagina que existem 2 chapéus vermelhos na roda.

Mas o baixinho não pode imaginar que o grandão imagina que existem 3 chapéus vermelhos na roda.

Porque o baixinho sabe que o grandão sabe que existem 3 chapéus pretos — (*o baixinho está vendo que o grandão está vendo isso ...*)

Então todos sabem que todos sabem que existem no máximo 2 chapéus vermelhos na roda.

E a gente pode pensar que é assim que a coisa começa no dia seguinte.

Daí, ninguém fala nada imediatamente — (*porque ninguém sabe a cor do seu próprio chapéu*)

E assim, todos descobrem que todos sabem que não existem 2 chapéus vermelhos na roda.

Porque se houvessem alguém teria visto, e teria descoberto a cor do seu chapéu.

No passo seguinte, ninguém fala nada outra vez — (*porque ninguém sabe ainda a cor do seu próprio chapéu*)

E assim todos descobrem que todos sabem que não existem nenhum chapéu vermelho na roda.

Porque se houvesse alguém teria visto, e teria descoberto a cor do seu chapéu.

E então, no terceiro passo todos dizem: “*Acho que eu já sei*”.

Legal, não é?

Quer dizer, agora a gente descobriu que o jogo acaba em 3 passos quando a roda é formada por pessoas espertas — (*i.e., pessoas que já conhecem a estrutura lógica do problema e conseguem raciocinar com ela*)

E o mais legal é que isso vale para rodas com qualquer quantidade de pessoas espertas.

3 O problema do chapéu com números

Agora imagine que são apenas 3 homens outra vez: o baixinho, o grandão e o outro.

Dessa vez, cada um tem um chapéu onde está escrito um número (inteiro, positivo).

Cada um vê os números dos outros, não vê o seu próprio número.

Eles sabem que um dos números é igual à soma dos outros dois.

O baixinho vê o 3 no chapéu do grandão, e o 1 no chapéu do outro.

Alguém pergunta: “*Você sabe qual é o número que está escrito no seu chapéu?*”

Depois de algum tempo o baixinho responde: “Em já sei”.

Como é que ele sabe?

Solução:

Bom, a gente já sabe que a melhor estratégia para resolver esses problemas é começar com o caso mais simples.

E dessa vez, o caso mais simples é aquele onde o baixinho vê o número 1 nos chapéus dos seus dois amigos.

Nesse caso, ele descobre imediatamente o número que está no seu chapéu — (*porque?*)

Certo.

Agora, imagine que o baixinho vê o número 2 no chapéu do grandão, e vê o número 1 no chapéu do outro.

Nesse caso, o baixinho fica na dúvida se o seu chapéu tem o número 1 ou o número 3.

Então o baixinho não fala nada.

E o grandão também não fala nada — (*porque é o baixinho quem adivinha primeiro no nosso problema*)

Ora, mas isso significa que o grandão não está vendo o 1 no chapéu do baixinho — (*porque senão ele falava*)

O baixinho percebe isso.

E no passo seguinte ele diz: “*Acho que eu já sei*”.

Nota: O outro vê os números 2 e 3 nos chapéus dos amigos. E a sua dúvida não se resolve no primeiro passo. Então ele também fica calado no segundo passo.

Agora nós podemos considerar o nosso problema, onde o baixinho vê o 3 no chapéu do grandão, e vê o 1 no chapéu do outro.

Nesse caso, o baixinho fica na dúvida se o seu chapéu tem o número 2 ou o número 4.

Então ele não fala nada.

Mas o baixinho sabe que se ele tiver o número 2, então o grandão vai adivinhar o seu número no segundo passo.

No segundo passo o grandão não fala nada.

O baixinho percebe isso.

E no passo seguinte ele diz: “*Acho que eu já sei*”.

Legal.

Aqui o padrão do raciocínio já está aparecendo — (*a estrutura lógica*)

Então a gente considera mais um caso pra ver melhor.

Imagine que o baixinho vê o 4 no chapéu do grandão, e vê o 1 no chapéu do outro.

Nesse caso, o baixinho fica na dúvida se o seu chapéu tem o número 3 ou o número 5.

Então ele não fala nada.

Mas o baixinho sabe que se ele tiver o número 3, então o grandão vai adivinhar o seu número no terceiro passo.

E quando isso não acontece, o baixinho descobre o seu próprio número no quarto passo.

É como uma corrida: aquele que tem o maior número ganha — (*porque ele vê o número menor no chapéu do outro*)

3.1 Generalização (opcional)

Agora nós vamos considerar problemas que não contém o número 1.

O caso mais simples é aquele em que alguém vê dois números 2 nos chapéus dos seus amigos.

E nesse caso, a pessoa advinha imediatamente o seu próprio número — (*porque?*)

Então imagine agora que o baixinho vê o número 3 no chapéu do grandão, e vê o número 2 no chapéu do outro.

Nesse caso, o baixinho fica na dúvida se o seu número é o 1 ou o 5 — (*essa é a situação do outro no problema original ...*)

Então o baixinho não fala nada.

Se ele tiver o 1, então o grandão vai advinhar o seu número no segundo passo.

Mas se isso não acontece, o baixinho descobre o seu número no terceiro passo.

Certo.

Agora imagine que o baixinho vê o 4 no chapéu do grandão, e vê o 2 no chapéu do outro.

Nesse caso, o baixinho fica na dúvida se o seu número é o 2 ou o 6.

Então ele não fala nada.

Mas o baixinho sabe que se ele tiver o 2, então o grandão vai advinhar o seu número imediatamente.

E se isso não acontece, o baixinho advinha o seu número no próximo passo.

Legal.

Agora imagine que o baixinho vê o 5 no chapéu do grandão, e vê o 2 no chapéu do outro.

Nesse caso, o baixinho fica na dúvida se o seu número é o 3 ou o 7.

Então ele não fala nada.

Mas o baixinho sabe que se ele tiver o 3, então o grandão vai advinhar o seu número no terceiro passo.

E se isso não acontece, o baixinho advinha o seu número no quarto passo.

Muito bom.

Depois de tanta repetição, a gente já pode ver o que está acontecendo.

Quer dizer, é como se a dúvida ficasse sendo jogada de um lado para o outro.

Nesse último caso, nós temos o seguinte

$$\begin{array}{ccccccc} (5, 2) & \rightarrow & (3, 2) & \rightarrow & (1, 2) & \rightarrow & (1, 1) \\ B? & & G? & & B? & & G? \end{array}$$

Daí, se a dúvida não se resolve dessa maneira (i.e., o grandão advinha no terceiro passo), então o baixinho descobre que o seu número não é o 3.

E assim o baixinho descobre o seu número no quarto passo.

No caso do grandão, a sequência de dúvidas é a seguinte

$$\begin{array}{ccccccccc} (7, 2) & \rightarrow & (5, 2) & \rightarrow & (3, 2) & \rightarrow & (1, 2) & \rightarrow & (1, 1) \\ G? & & B? & & G? & & B? & & G? \end{array}$$

E como ela é mais longa, o grandão não consegue advinhar o seu número primeiro.