

Matemática Discreta

aula 06: O problema do gato e o problema dos beduínos

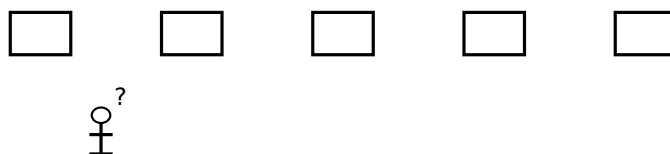
1 Introdução

(. . .)

2 O problema do gato

Você tem 5 caixas lado a lado.

E um gato está escondido em uma delas



Todo dia você pode abrir uma caixa.

E toda noite o gato passa para uma caixa adjacente àquela onde ele está.

Como é que você pega o gato?

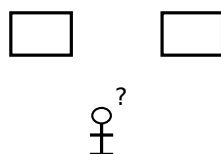
Solução:

Bom, a nossa estratégia é sempre começar com o caso mais simples.

Dessa vez, o caso mais simples é aquele em que existe apenas uma caixa.

Só que esse caso não tem a menor graça — *(porque você abre a caixa e o gato está lá ...)*

Então agora, a gente considera o problema com duas caixas



Daí, no primeiro dia você abre uma caixa qualquer.

E se o gato está lá, então acabou-se a história.

Mas se o gato não está lá, a gente pode fazer uma pequena esperteza.

Quer dizer, se o gato não está lá, então ele estava na outra caixa.

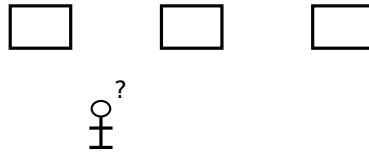
Mas se o gato estava na outra caixa, então no dia seguinte ele vai estar na caixa que a gente abriu — *(porque a noite ele muda de caixa)*

Então no dia seguinte, a gente abre a mesma caixa outra vez.

E encontra o gato lá dentro.

Legal.

Agora a gente considera o problema com 3 caixas



E aqui, basta fazer a mesma coisa outra vez.

Quer dizer, a gente começa abrindo a caixa do meio.

E se o gato está lá, então acabou-se a história.

Mas se o gato não está lá, então ele estava em uma caixa das pontas.

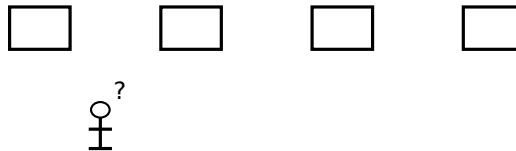
E se o gato estava em uma das caixas das pontas, então no dia seguinte ele vai estar na caixa do meio — *(porque a noite ele muda de caixa)*

Então no dia seguinte, a gente abre a caixa do meio outra vez.

E encontra o gato lá dentro.

Legal.

Agora considere o problema com 4 caixas



E agora?

Quer dizer, agora ficar abrindo a mesma caixa todo dia não funciona mais — *(porque?)*

Então, a gente precisa ser um pouco mais esperto.

E a esperteza consiste em fazer a mesma coisa outra vez: abrir a segunda caixa dois dias seguidos.

Porque?

Bom porque daí, ou a gente pega o gato, ou a gente já sabe que o gato está do lado direito — *(porque?)*

Então agora, a gente vai atrás do gato no lado direito.

E para fazer isso, a gente abre a terceira caixa.

Mas quando a gente abre a terceira caixa, o gato pode passar para o lado esquerdo.

E a gente fica na mesma situação outra vez.

Só que, a situação não é realmente a mesma — *(tem uma coisa diferente)*

Quer dizer, se o gato passar para o lado esquerdo, então ele vai estar na segunda caixa.

E a gente pode utilizar essa informação.

Mas antes disso, é preciso verificar se o gato ainda não está do lado direito.

Para isso, a gente abre a terceira caixa outra vez — *(porque?)*

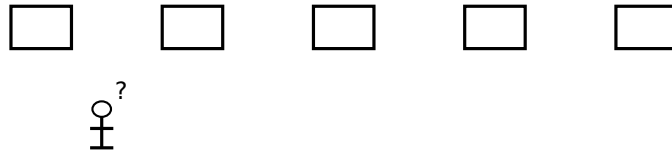
Se o gato não está lá, então ele realmente passou para o lado esquerdo.

E nesse ponto, ele deve estar na primeira caixa — *(porque?)*

Então no dia seguinte, a gente abre a segunda caixa e encontra o gato lá dentro.

Legal, não é?

Agora nós estamos prontos para resolver o nosso problema



A gente começa abrindo a segunda caixa duas vezes. Daí, se a gente não pega o gato, então ele está do lado direito.

E agora, a gente vai atrás do gato no lado direito.

No dia seguinte, a gente abre a terceira caixa.

Durante a noite, o gato pode ter passado para o lado esquerdo.

Mas se isso aconteceu, ele agora está na caixa 2.

E a gente continua indo para o lado direito.

Para isso, a gente abre a caixa 4.

Durante a noite, o gato pode ter passado para a caixa 3.

Ou então, se ele estava na caixa 2, ele passou para 1 ou 3.

Certo.

A gente termina a exploração do lado direito abrindo a caixa 4 outra vez — (*porque?*)

E o gato que estava em 1 ou 3, passa para a caixa 2 durante a noite.

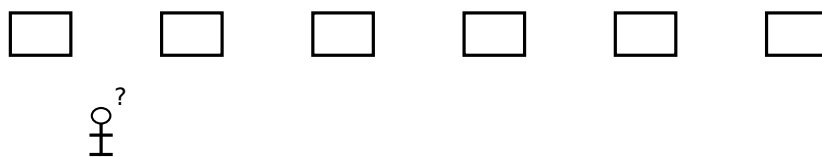
Então no dia seguinte, a gente abre a caixa 2.

E encontra o gato lá dentro.

Legal, não é?

Agora a estratégia já está ficando clara.

E a gente termina de ver como a coisa funciona considerando o problema com 6 caixas



A primeira etapa consiste em tenta encurralar o gato do lado direito

- a gente abre a caixa 2 duas vezes
- e depois abre as caixas 3, 4 e 5

Quando a gente abriu a caixa 5, o gato pode ter passado para a caixa 4 — (*durante a noite*)

E se ele está do lado esquerdo nesse momento, então ele está em 2 ou 4 — (*uma caixa par*)

No dia seguinte, a gente abre a caixa 5 outra vez.

E se ele não está lá, então agora ele está em 1 ou 3 — (*uma caixa ímpar*)

Durante a noite, o gato vai passar para 2 ou 4 — (*uma caixa par*)

Então no dia seguinte, a gente abre a caixa 4.

Se o gato não está lá, então agora ele está em 2.

E durante a noite, ele vai passar para 1 ou 3 — (*uma caixa ímpar*)

Então no dia seguinte, a gente abre a caixa 3.

Se o gato não está lá, então ele está na caixa 1.

E durante a noite, ele vai passar para a caixa 2 — (*a única caixa par do lado esquerdo*)

Então no dia seguinte, a gente abre a caixa 2.

E encontra o gato lá dentro.

Certo.

Agora, a gente pode descrever a nossa estratégia assim

- Na 1a etapa, a gente tenta encurralar o gato no lado direito
- Se a gente não pega o gato, então agora ele está do lado esquerdo.
- Só que a cada dia, a gente sabe se o gato está em uma caixa par ou ímpar
- Então a cada dia, a gente abre a caixa mais à direita onde o gato pode estar.
- E dessa maneira, a gente encurrala o gato no lado esquerdo.

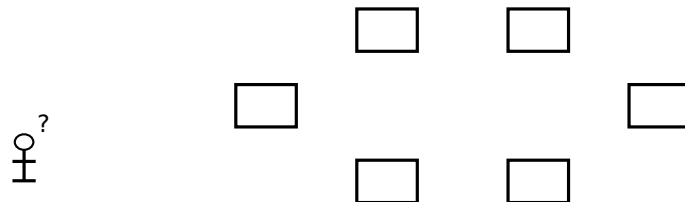
Com essa estratégia, a gente resolve o problema com qualquer número de caixas.

Legal, não é?

2.1 Complicando as coisas

Agora, para continuar raciocinando, a gente complica um pouquinho as coisas.

Quer dizer, imagine agora que as caixas estão dispostas em círculo



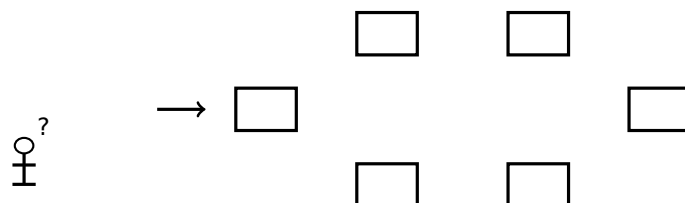
E agora?

Bom, agora é impossível encurralar o gato — (*porque?*)

Então para que o problema tenha solução outra vez, agora você pode abrir duas caixas a cada dia.

Só que isso tira a graça do problema.

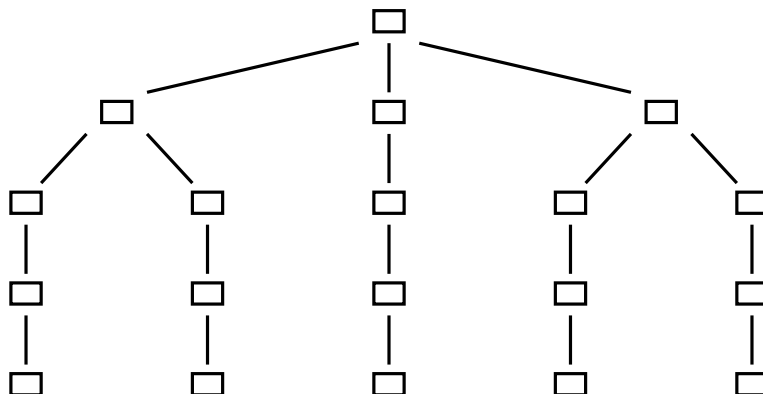
Porque agora, você pode escolher uma caixa que você vai abrir todo dia



Daí, é como se agora as demais caixas formassem uma fila.

E a gente pode usar a nossa estratégia para encurralar o gato na fila.

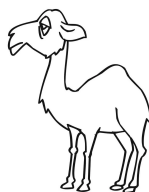
Então agora, a gente complica as coisas assim



Sim, uma árvore de caixas!

Você consegue pegar o gato nessa situação?

3 O problema dos beduínos



Quatro beduínos, cada um com o seu camelo, estão à beira do deserto.

Eles precisam entregar um pacote no acampamento que fica a 4 dias de viagem para dentro do deserto.

Cada beduíno carrega um cantil com suprimento de água para 5 dias.

Como é que os beduínos podem cumprir a sua tarefa e voltar todos a salvo para casa?

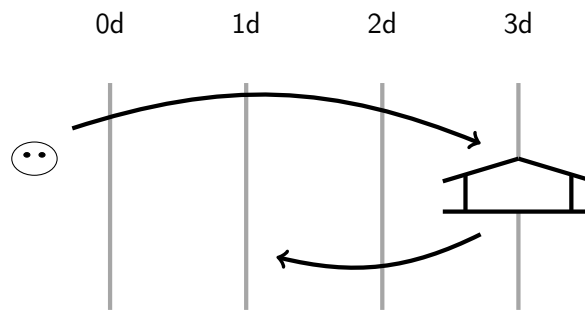
Dica: Os camelos não precisam beber água.

Solução:

Bom, se o acampamento fica a 2 dias de viagem para dentro do deserto, então um beduíno sozinho pode realizar a tarefa — *(e ainda sobra 1 litro de água no seu cantil ...)*

Mas, se o acampamento fica a 3 dias de viagem, então o beduíno vai precisar da ajuda dos seus amigos.

Quer dizer, o primeiro beduíno pode alcançar o acampamento e voltar 2 dias



E daí, um segundo beduíno pode alcançá-lo nesse ponto, dar 1 litro de água para ele, e depois ambos voltam a salvo para casa.

Legal.

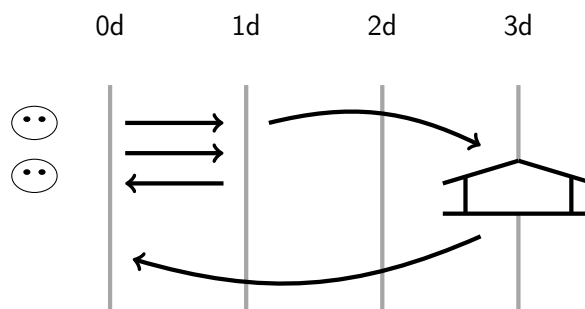
Mas, essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, o primeiro beduíno pode receber ajuda ainda no caminho de ida.

A ideia é que dois beduínos iniciam o caminho juntos.

Daí, após 1 dia de viagem o segundo beduíno enche o cantil do primeiro, e depois volta para casa.

E com o cantil cheio, o primeiro beduíno consegue alcançar o acampamento e depois voltar.



Certo.

Agora nós estamos prontos para resolver o nosso problema, onde o acampamento está a 4 dias de viagem dentro do deserto.

De acordo com a primeira estratégia, um beduíno alcança o acampamento sozinho, e depois volta 1 dia.

Daí, os outros beduínos precisam fazer o seu resgate:

- Para alcançar o primeiro beduíno 3 dias dentro do deserto, o segundo beduíno vai gastar 3 litros de água.

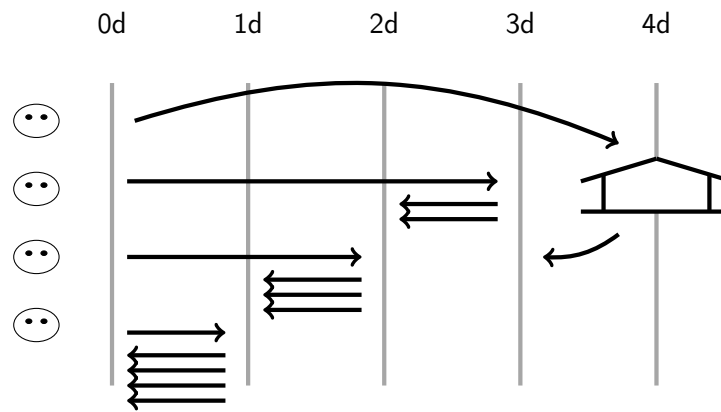
Daí, ele dá 1 litro de água para o primeiro, e ambos voltam 1 dia.

- A seguir, para alcançar os dois primeiros 2 dias dentro do deserto, o terceiro beduíno vai gastar 2 litros de água.

Daí, ele dá 1 litro de água para os outros dois, e os três voltam mais 1 dia.

- Finalmente, para alcançar os três primeiros 1 dia dentro do deserto, o quarto beduíno vai gastar 1 litro de água.

Daí, ele dá 1 litro de água para os outros três, e todos voltam a salvo para casa.



Mas, essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, é fácil inverter essa solução para que a ajuda seja dada no caminho de ida

- Entram os 4 beduínos 1 dia no deserto, daí um deles recarrega o cantil dos outros 3, e volta para casa.
- Com o cantil cheio, os três avançam até o dia 2; daí, um deles recarrega o cantil dos outros 2, e volta para casa.
- Com o cantil cheio, os dois avançam até o dia 3; daí, um deles recarrega o cantil do outro, e volta para casa.
- Com o cantil cheio no dia 3, o beduíno que resta alcança o acampamento e volta a salvo para casa.

Legal.

Mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

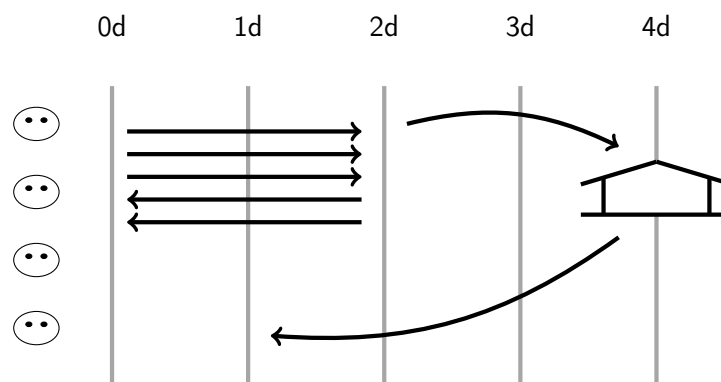
Quer dizer, também pode haver ajuda na ida e na volta.

A ideia é que o primeiro beduíno vai ter 2 ajudantes na ida.

Os três entram 2 dias no deserto.

Daí, os dois ajudantes dão 1 litro de água cada ao primeiro, e voltam a salvo para casa.

Com o cantil cheio, o primeiro beduíno alcança o acampamento e volta até o dia 1

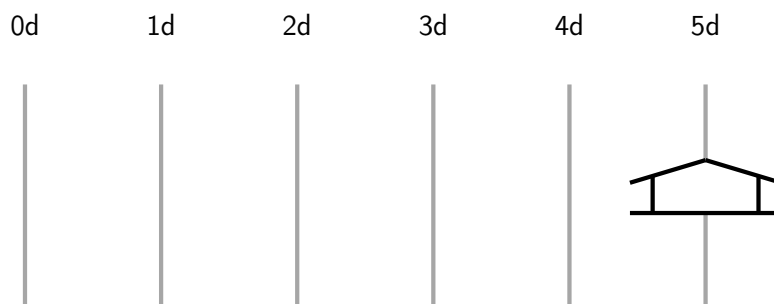


A seguir, o quarto beduíno faz o resgate do primeiro, e ambos voltam a salvo para casa.

3.1 Generalização

Agora que nós já temos bons truques, a gente pode tentar a generalização.

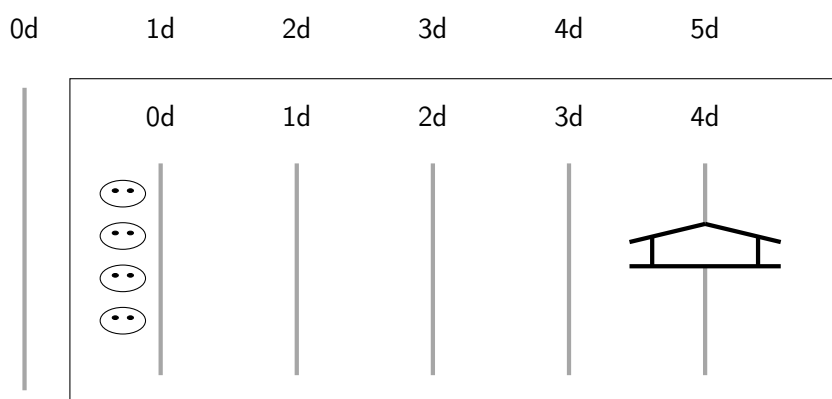
Para isso, a gente coloca o acampamento a 5 dias de distância



E pergunta: *Quantos beduínos são necessários para entregar o pacote?*

Bom, a gente já sabe que 4 beduínos resolvem o problema de 4 dias.

E a seguir a gente nota que o problema de 4 dias está dentro do problema de 5 dias



Então, tudo o que a gente precisa fazer é

- Colocar 4 beduínos no dia 1 com o cantil cheio.
- E no final resgatar esses 4 beduínos do dia 1, trazendo eles a salvo para casa.

Para isso, basta dar 2 ajudantes para cada beduíno.

Quer dizer, o primeiro ajudante acompanha o beduíno até o dia 1.

Daí, ele recarrega o cantil do beduíno e volta para casa.

O segundo ajudante resgata o beduíno no dia 1, dando 1 litro de água para ele.

E daí, os dois voltam a salvo para casa.

Então, 12 beduínos são suficientes para resolver o problema com 5 dias.

E não é só isso.

Quer dizer, basta triplicar o número de beduínos outra vez para resolver o problema com 6 dias — *(dando 2 ajudantes para cada um dos 12 beduínos)*

Mas, essa solução não é muito eficiente.

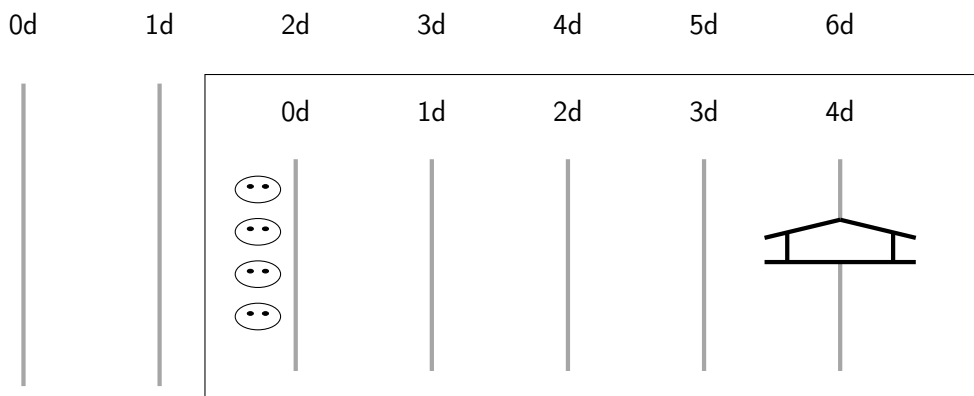
Porque cada ajudante está terminando com 2 litros de água no cantil.

Como são 8 ajudantes, isso dá um total de 16 litros de água.

O que indica que talvez a gente possa economizar uns 3 beduínos nessa história.

Para encontrar uma solução melhor, a gente considera o problema com 6 dias.

E nota que o problema de 4 dias também está dentro do problema de 6 dias



Então agora, a nossa tarefa é

- Colocar 4 beduínos no dia 2 com o cantil cheio.
- E no final resgatar esses 4 beduínos do dia 2, trazendo eles a salvo para casa.

Daí, a gente usa um truque conhecido.

Quer dizer, cada beduíno entra 2 dias no deserto junto com 2 ajudantes.

Daí, cada ajudante dá 1 litro de água para o beduíno, e voltam os dois para casa — *(com o cantil vazio)*

E o beduíno fica com o cantil cheio no dia 2.

A estratégia de resgate no dia 2 é análoga.

Agora, cada beduíno tem 4 ajudantes, e nós estamos multiplicando o número total de beduínos por 5.

Mas, nós também estamos aumentando a distância do acampamento em 2 dias.

Então, esse raciocínio nos dá uma solução para o problema de 6 dias com $5 \cdot 4 = 20$ beduínos.

Enquanto que o primeiro raciocínio nos dá uma solução com $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ beduínos.

Legal, não é?