

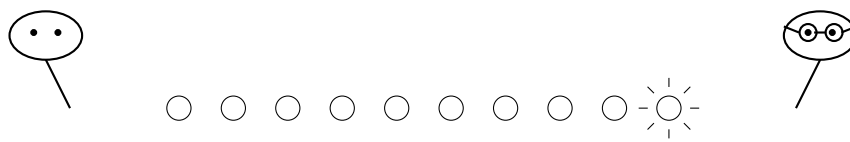
Matemática Discreta

aula 07: Problemas combinatórios

1 Introdução

Imagine que uma fileira de moedas foi colocada sobre a mesa.

E imagine que a última moeda é dourada



A cada rodada os jogadores podem remover 1 ou 2 moedas da ponta esquerda.

Ganha o jogo aquele que obtém a moeda dourada.

E então, você prefere fazer a primeira jogada ou não?

Solução:

Bom, vamos ver.

Se o jogo começa com 1 ou 2 moedas apenas, então a pessoa que joga primeiro ganha sempre — *(porque ela pode pegar todas as moedas)*

Mas, se o jogo começa com 3 moedas, então a primeira pessoa sempre perde.

Porque?

Bom porque daí, não importa como ela jogue, vão sobrar 1 ou 2 moedas na mesa.

E daí a segunda pessoa ganha na jogada seguinte.

Certo.

A seguir, quando o jogo começa com 4 ou 5 moedas, é a primeira pessoa quem ganha outra vez.

Porque a sua jogada pode deixar 3 moedas na mesa.

E a pessoa que joga quando existem 3 moedas na mesa sempre perde o jogo.

Mas, quando o jogo começa com 6 moedas, quem ganha é a segunda pessoa.

Porque, não importa como a primeira pessoa jogue, vão sobrar 4 ou 5 moedas na mesa.

E a pessoa que joga quando existem 4 ou 5 moedas na mesa sempre ganha o jogo.

Legal.

Aqui já dá pra ver a repetição.

E a gente pode advinhar que

→ *Se o jogo começa com uma quantidade de moedas múltipla de 3
então a segunda pessoa sempre ganha o jogo*

Caso contrário, quem ganha é a primeira pessoa.

Porque?

Bom, imagine que o jogo começa com uma quantidade de moedas múltipla de 3.

Então, não importa como a primeira pessoa jogue, a segunda sempre pode devolver a mesa com uma quantidade de moedas múltipla de 3.

O jogo vai continuar se desenrolando dessa maneira.

E a quantidade de moedas na mesa vai diminuindo.

Alguma hora, a primeira pessoa recebe a mesa com 3 moedas.

E nessa situação, a gente já sabe que a primeira pessoa perde o jogo.

Legal.

Agora, imagine que o jogo começa com uma quantidade de moedas que não é múltipla de 3.

Então na primeira jogada, a primeira pessoa pode deixar a mesa com uma quantidade de moedas múltipla de 3.

E a gente já sabe que a pessoa que recebe a mesa com uma quantidade de moedas múltipla de 3 sempre perde o jogo.

◇

2 Problemas combinatórios

O jogo Nim é assim.

Imagine que existem 5 pilhas com 5 moedas cada em cima da mesa.

A cada rodada, um jogador pode escolher uma pilha qualquer e remover uma quantidade qualquer de moedas dessa pilha.

Ganha o jogo aquele que faz a última jogada



E então, você prefere fazer o primeiro movimento ou não?

Solução:

Bom, a melhor coisa a fazer é começar com o caso mais simples.

Se o jogo começa com 1 pilha com uma única moeda, então a primeira pessoa ganha.

Agora imagine que o jogo começa com 2 pilhas com 2 moedas cada



Aqui, se a primeira pessoa remove uma pilha inteira, então a segunda pessoa ganha.

Logo, a primeira pessoa vai remover uma moeda só.

Mas daí, a segunda pessoa também pega uma moeda só da outra pilha, deixando a situação assim



E aqui já dá pra ver que a segunda pessoa vai ganhar.

Legal.

Agora, a gente considera a situação onde existem 2 pilhas com 3 moedas cada — (*porque?*)



Aqui

- Se a 1a pessoa tira 1 moeda só, então a 2a pessoa também tira 1 moeda só da outra pilha, deixando 2 pilhas com 2 moedas cada
- Se a 1a pessoa tira 2 moedas, então a 2a pessoa também tira 2 moedas da outra pilha, deixando 2 pilhas com 1 moedas cada
- Se a 1a pessoa remove uma pilha inteira, então a 2a pessoa remove a outra pilha inteira, deixando a mesa vazia

Quer dizer, a 2a pessoa sempre repete a jogada da 1a pessoa, deixando a mesa com duas pilhas do mesmo tamanho.

E dessa maneira, a segunda pessoa sempre ganha o jogo.

Essa estratégia funciona sempre que o jogo começa com 2 pilhas do mesmo tamanho — (*não importa que tamanho é esse*)

Legal.

Agora imagine que o jogo começa com 3 pilhas com 3 moedas cada



Aqui, a primeira pessoa pode remover uma pilha inteira, deixando 2 pilhas com 3 moedas cada.

E nessa situação, a gente já sabe que a segunda pessoa vai perder.

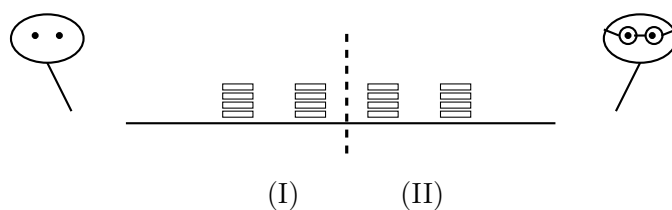
Certo.

A seguir, a gente considera o caso com 4 pilhas com 4 moedas cada



E aqui é a hora para uma pequena esperteza.

Quer dizer, aqui a 2a pessoa vai imaginar que ela está jogando 2 jogos Nim com a primeira pessoa



Dáí, se a primeira pessoa joga na pilha 1 ou 2, a segunda pessoa imagina que isso faz parte do jogo I.

E se a primeira pessoa joga na pilha 3 ou 4, a segunda pessoa imagina que isso faz parte do jogo II.

A ideia é que em ambos os jogos, a segunda pessoa vai utilizar a estratégia que nós vimos acima

— (*para o jogo com 2 pilhas iguais*)

Então, a segunda pessoa vai ganhar os dois jogos.

E isso significa que ela vai ganhar o jogo com 4 pilhas.

Legal.

Aqui já dá pra ver que

→ *Se o jogo começa com uma quantidade par de pilhas, todas do mesmo tamanho, então a 2a pessoa ganha sempre*

E ao ver isso, a gente também vê que

→ *Se o jogo começa com uma quantidade ímpar de pilhas, todas do mesmo tamanho, então a 1a pessoa ganha sempre — (porque?)*

Legal, não é?