

Matemática Discreta

aula 08: Raciocinando sobre a divisibilidade

1 Introdução

Hoje nós vamos começar com a seguinte pergunta

- *O que é isso ?*

3 5 8 1 4

Bom, você pode responder que isso é um número.

Mas, isso é o mesmo que colocar a coisa em uma caixa.

E daí, há muito pouca coisa que se pode fazer com ela.

Uma resposta melhor seria dizer: *Isso é uma soma de PG*

$$3\ 5\ 8\ 1\ 4 = 4 \times 10^0 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^2 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^4$$

Claro, isso não é uma soma de PG.

Mas, ao ver as coisas desse modo, a gente já pode raciocinar.

2 Divisibilidade

Todo mundo conhece a regra da divisibilidade por 3.

Quer dizer, para saber se um número é divisível por 3

1 8 9 7 5 2

você soma todos os seus dígitos

$$1 + 8 + 9 + 7 + 5 + 2 = 32$$

E daí, você vê se aquilo que deu é divisível por 3

— (*e se você ainda não consegue ver, então você faz a mesma coisa outra vez ...*)

Mas, daonde vem essa regra?

Bom, um número é divisível por 3 se ele pode ser decomposto em grupinhos de 3.

Por exemplo,

$$15 = \begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \end{array}$$

é divisível por 3

$$8 = \begin{array}{c} \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \end{array}$$

não é divisível por 3

E é basicamente isso que a regra está verificando.

Vejamos.

Note que o 1 não é divisível por 3

$$1 = \text{[oval with 1 dot]}$$

E o 10 também não é

$$10 = \text{[oval with 3 dots]} \text{ [oval with 3 dots]} \text{ [oval with 3 dots]} \text{ [oval with 1 dot]}$$

E o 100 também não é.

Porque?

Ora, porque o 100 é como uma caixa que contém 10 cópias do 10

$$100 = \begin{array}{cccc} \text{[oval with 3 dots]} & \text{[oval with 3 dots]} & \text{[oval with 3 dots]} & \text{[oval with 1 dot]} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{[oval with 3 dots]} & \text{[oval with 3 dots]} & \text{[oval with 3 dots]} & \text{[oval with 1 dot]} \end{array} \Bigg| 10$$

E o que a gente vê aqui é um monte de grupinhos de 3 mais 10 1's.

Mas, 10 1's é a mesma coisa que 10.

E 10 é a mesma coisa que 3 grupinhos de 3 mais 1.

Logo, o 100 é um monte de grupinhos de 3 mais 1

$$100 = \text{[oval with 3 dots]} \dots \dots \text{[oval with 3 dots]} \text{ [oval with 1 dot]}$$

E assim a gente vê que o 100 não é divisível por 3.

Legal.

E agora, a gente pode ver que o 1000 também não é divisível por 3.

Quer dizer, é a mesma coisa.

A gente começa notando que o 1000 é como uma caixa que contém 10 cópias do 100

$$1000 = \begin{array}{cccc} \text{[oval with 3 dots]} & \dots & \dots & \text{[oval with 3 dots]} \text{ [oval with 1 dot]} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{[oval with 3 dots]} & \dots & \dots & \text{[oval with 3 dots]} \text{ [oval with 1 dot]} \end{array} \Bigg| 10$$

Daí, repetindo o raciocínio o mesmo raciocínio outra vez, a gente vê que o 1000 é um monte de grupinhos de 3 mais 1

$$1000 = \underbrace{\bullet \bullet \bullet} \dots \dots \dots \underbrace{\bullet \bullet \bullet} \underbrace{\bullet}$$

Logo, o 1000 também não é divisível por 3.

Em resumo,

- se você tem uma caixa com um monte de grupinhos de 3 mais 1
- e você coloca 10 cópias dessa caixa em uma caixa maior
- então, a caixa maior também vai conter um monte de grupinhos de 3 mais 1

Engraçado, não é?

Quer dizer, a coisa entrou em repetição.

E assim a gente descobre que nenhuma potência de 10 é divisível por 3

— *(e que todas elas deixam resto 1 ...)*

Legal.

Mas, o que tem isso a ver com a regra da divisibilidade por 3?

Bom, basta observar que o número

1 8 9 7 5 2

pode ser desmontado assim

- 2 caixinhas de 1
- mais 5 caixinhas de 10
- mais 7 caixinhas de 100
- mais 9 caixinhas de 1000
- mais 8 caixinhas de 10000
- mais 1 caixinha de 100000

Cada uma dessas caixinhas vai deixar resto 1 — *(quando descomposta em grupinhos de 3 ...)*

Daí que, vai sobrar um total de

$$1 + 8 + 9 + 7 + 5 + 2 = 32 \text{ 1's}$$

E como 32 não é divisível por 3, o nosso número não é divisível por 3.

Ah sim, agora eu entendi!

3 Regras de divisibilidade

Todas as regras de divisibilidade usam essa mesma lógica.

Por exemplo, a regra do 2 diz que a gente só precisa olhar para o último dígito

1 8 9 7 5 2

Porque?

↑

Bom, porque as caixinhas do 10, 100, 1000, etc sempre podem ser decompostas em grupinhos de 2 — (*sem nunca sobrar nada ...*)

Daí que, só resta saber se o último dígito pode ser decomposto em grupinhos de 2 ou não.

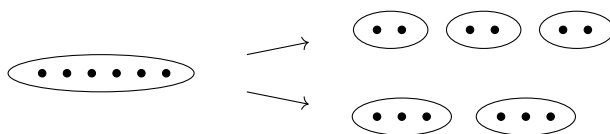
A regra do 5 também é assim.

Mas, a regra do 6 é um pouco diferente

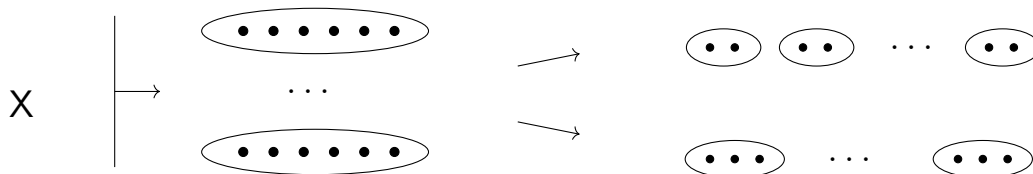
→ Um número é divisível por 6 se ele for divisível por 2 e por 3

Hmm, o que está acontecendo aqui?

Bom, a gente pode começar observando que um grupinho de 6 pode ser desmontado tanto em grupinhos de 2 como em grupinhos de 3



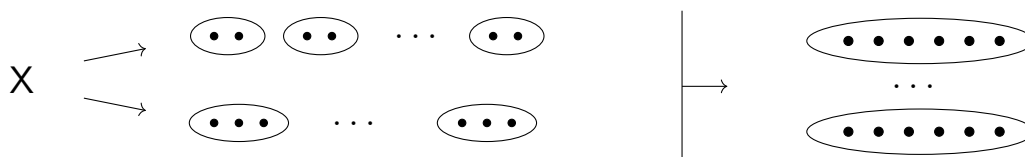
Daí que, se um número for divisível por 6, então ele também vai ser divisível por 2 e por 3



Sim, isso é verdade.

Mas, o que a regra está dizendo é o contrário.

Quer dizer, a regra diz que se o número pode ser decomposto em grupinhos de 2, e também pode ser decomposto em grupinhos de 3, então ele pode ser decomposto em grupinhos de 6



Certo.

Mas, porque será que isso é verdade?

Bom, aqui nós vamos precisar de uma pequena esperteza.

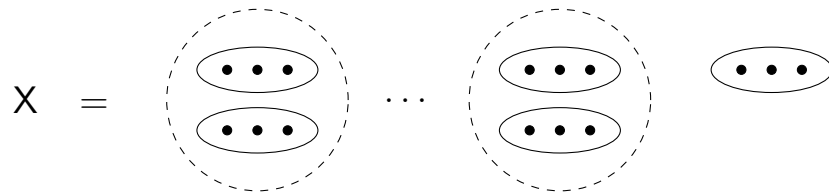
Quer dizer, a esperteza consiste em perguntar

- Quantos grupinhos de 3 existem na decomposição de X: uma quantidade par ou ímpar ?

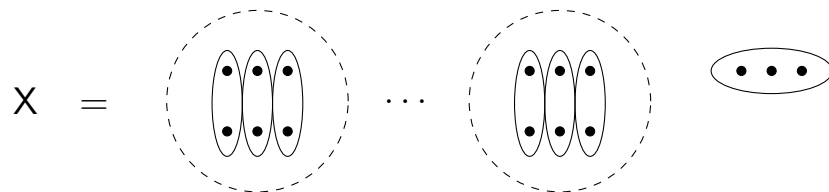
O que você acha?

Bom, vamos examinar primeiro o palpite de que a quantidade é ímpar.

Quer dizer, se a quantidade é ímpar, então ao decompor a coleção de grupinhos de 3 em grupos com dois grupinhos cada, vai sempre sobrar um grupinho



Mas, um grupo que tem dois grupinhos de 3 dentro pode ser reorganizado como três grupinhos de 2



Daí que, se a gente decompor o X em grupinhos de 2, vai acabar sobrando 1.

Só que isso não é verdade!

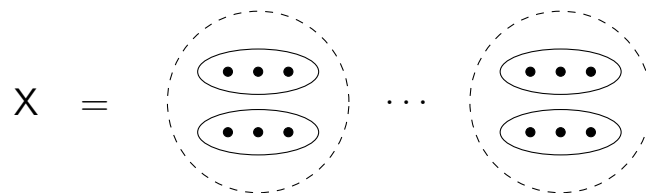
Quer dizer, desde o início a gente já sabia que o X pode ser decomposto em grupinhos de 2



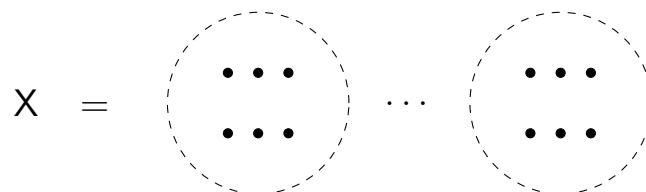
Logo, a quantidade de grupinhos de 3 não pode ser ímpar.

E se ela não pode ser ímpar, então ela tem que ser par.

Mas se ela é par, então não sobra nada quando a gente organiza os grupinhos de 3 em grupos de 2



E daí, esquecendo os grupinhos de 3



a gente vê que X é divisível por 6.

Não é legal?

4 Mais regras de divisibilidade

Agora, nem todo mundo conhece a regra do 11.

Mas ela é uma regra engraçada.

Veja só.

Nós começamos outra vez examinando o que acontece quando nós tentamos decompor as caixinhas 1, 10, 100, 1000, ... em grupinhos de 11

$$\begin{aligned}
 1 &= \text{[1 dot]} \Rightarrow \text{sobra 1} \\
 10 &= \text{[10 dots]} \Rightarrow \text{falta 1} \\
 100 &= 9 \times \text{[90 dots]} + \text{[1 dot]} \Rightarrow \text{sobra 1} \\
 1000 &= 90 \times \text{[900 dots]} + \text{[10 dots]} \Rightarrow \text{falta 1}
 \end{aligned}$$

Quer dizer, está aparecendo um padrão: *sobra 1, falta 1, sobra 1, falta 1, ...*

Mas, será que vai ser sempre assim?

Sim, vai ser sempre assim.

E para ver isso, a gente considera a próxima caixinha: o 10000.

Quer dizer, o 10000 é uma caixinha onde tem 10 1000's.

E o 1000 é uma caixinha onde falta 1 para formar um monte de grupinhos de 11 completos.

Daí que, se nós tivermos 10 caixinhas de 1000, vão faltar 10 para formar um monte de grupinhos de 11 completos.

Só que faltar 10 é a mesma coisa que sobrar 1

$$\begin{array}{ccc}
 \text{[1 dot]} & \Rightarrow & \text{sobra 1} \\
 \text{falta 10} & &
 \end{array}$$

Quer dizer, nós acabamos de descobrir que

$$10 \times \boxed{\text{cx falta 1}} = \boxed{\text{cx sobra 1}}$$

E um raciocínio semelhante nos mostra que

$$10 \times \boxed{\text{cx sobra 1}} = \boxed{\text{cx falta 1}}$$

E isso faz com que o padrão *sobra 1, falta 1* continue para sempre — (*você consegue ver?*)

Sim, isso é legal.

Mas, qual é a regra do 11?

Bom, agora nós já estamos bem perto.

Quer dizer, considere o número

5 9 2 3 1 7

Esse número pode ser desmontado assim

- 7 caixinhas de 1 (onde sobra 1 em cada uma)
- 1 caixinha de 10 (onde falta 1 em cada uma)
- 3 caixinhas de 100 (onde sobra 1 em cada uma)
- 2 caixinhas de 1000 (onde falta 1 em cada uma)
- 9 caixinhas de 10000 (onde sobra 1 em cada uma)
- 5 caixinhas de 100000 (onde falta 1 em cada uma)

Daí que, se nós tentarmos organizar o número 592317 em grupinhos de 11, vão

sobrar $(7 + 3 + 9)$ e faltar $(1 + 2 + 5)$

Mas, isso é o mesmo que sobrar 11.

E sobrar 11 é o mesmo que não sobrar nada.

Logo, 592317 é divisível por 11.

Agora, resumindo tudo, nós temos que a regra da divisibilidade do 11 é

- Some os dígitos das posições ímpares
e subtraia os dígitos das posições pares,
Se aquilo que deu for divisível por 11
então o número é divisível por 11

5 A divisibilidade por 7

— *Rá, eu já entendi!*

— *O que?*

— *Como se inventa uma regra de divisibilidade.*

— *Será?*

— *Acho que sim.*

Diga um número aí.

— *Hmm, deixa eu ver ...*

Vai, o 7.

— Certo, então vamos ver qual é a regra do 7.

Tudo começa com o 1, que é uma caixa que sobra 1.

— Sim.

— Daí, a gente lembra que o 10 é uma caixa que tem 10 1's dentro.

Logo, o 10 é uma caixa que sobra 10.

Mas, quando a gente está formando grupinhos de 7,

uma caixa que sobra 10 é a mesma coisa que uma caixa que sobra 3

$$10 \times \boxed{\text{cx sobra 1}} = \boxed{\text{cx sobra 3}}$$

— Hmm ...

Acho que eu to começando a entender o princípio da coisa.

— Sim, vamos dar mais um passo.

A gente já sabe que o 10 é uma caixa que sobra 3.

Mas, o 100 é uma caixa que tem 10 10's dentro.

Logo, o 100 é uma caixa que sobra 30.

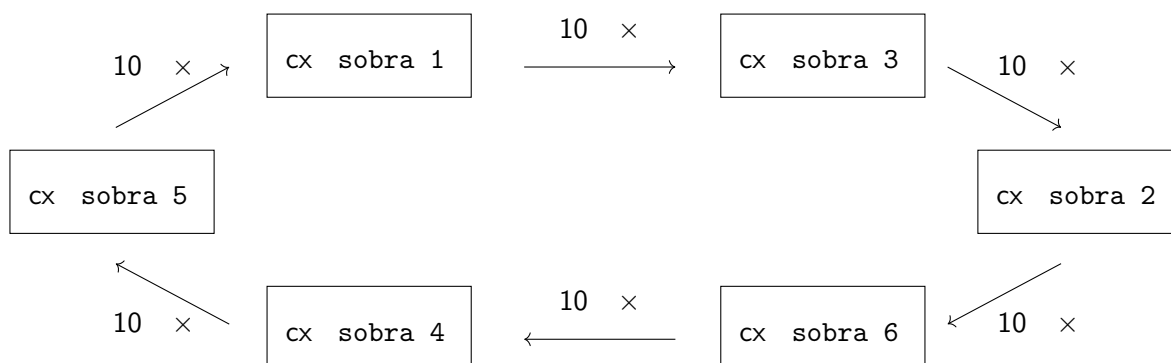
Só que, uma caixa que sobra 30 é a mesma coisa que uma caixa que sobra 2

— *(quando a gente está formando grupinhos de 7)*

$$10 \times \boxed{\text{cx sobra 3}} = \boxed{\text{cx sobra 2}}$$

— He he he, entendi!

— Então, raciocinando dessa maneira, a gente pode montar o seguinte esquema



— Quer dizer, a coisa entra em repetição.

— Sim, sempre entra em repetição! — *(porque?)*

— Legal.

Mas, qual é a regra do 7?

— Bom, para chegar lá a gente pode lembrar que o número

1 5 4 2 3 1 7

pode ser desmontado assim

- 7 caixinhas de 1
- 1 caixinhas de 10
- 3 caixinhas de 100
- 2 caixinhas de 1000
- 4 caixinhas de 10000
- 5 caixinhas de 100000
- 1 caixinha de 1000000

E agora, usando o esquema acima, a gente pode ver que vão sobrar

$$(7 \times 1 + 1 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 6 + 4 \times 4 + 5 \times 5 + 1 \times 1) \quad 1's$$

— O que dá 70, que é divisível por 7.

Logo, o número 1542317 é divisível por 7.

— É isso aí.

E daí, a regra fica assim¹

- Some os dígitos das posições 1, 7, 13, ..., e depois multiplique por 1
- Some os dígitos das posições 2, 8, 14, ..., e depois multiplique por 3
- Some os dígitos das posições 3, 9, 15, ..., e depois multiplique por 2
- Some os dígitos das posições 4, 10, 16, ..., e depois multiplique por 6
- Some os dígitos das posições 5, 11, 17, ..., e depois multiplique por 4
- Some os dígitos das posições 6, 12, 18, ..., e depois multiplique por 5
- Finalmente, some tudo e veja se o resultado é divisível por 7

Outra regra do 7

— Mas, essa tua regra é meio complicada, não é?

— Hmm, é verdade.

— Por outro lado ela também é simples,
porque ela tem uma lógica por trás.

¹Veja como isso parece um programa de computador ...

— *Sim.*

Mas na hora de escrever acaba ficando meio grande ...

— *Pois é ...*

— *Mas, você tem uma regra mais simples?*

— *Sim, eu vi um negócio por aí ...*

— *Então explique.*

— *Certo.*

A regra é assim

→ *Duplique o último dígito.*

E subtraia o resultado

do número formado pelos outros dígitos

Se aquilo que der for divisível por 7

então o seu número é divisível por 7.

— *Hmm??*

— *Calma, a coisa funciona assim.*

Considere o número 8638.

Daí, a gente aplica a regra assim

$$\begin{array}{r} 8638 \\ \hline \swarrow \quad \searrow \\ 863 - (2 \times 8) = 847 \end{array}$$

Daí que, 8638 é divisível por 7 se o número 847 também for.

— *Sim, mas como é que a gente sabe isso?*

— *Bom, é só aplicar a regra outra vez*

$$\begin{array}{r} 847 \\ \hline \swarrow \quad \searrow \\ 84 - (2 \times 7) = 70 \end{array}$$

E aqui já deu pra ver que dá certo.

— *Legal!*

Mas, será que funciona sempre?

— *Bom, eu testei com um monte de números
e não deu errado nenhuma vez.*

— *Ok.*

Mas, porque funciona?

— *Ah, tem uma esperteza aqui ...*

— *Então explique, valha-me Deus.*

— *Tá bom, tá bom.*

A esperteza é usar caixinhas de 20 no raciocínio.

Porque, quando a gente está formando grupinhos de 7,

o 20 é uma caixinha bem simples: ela é uma caixa falta 1.

— *Hmm*

— *Bom.*

Daí, a gente observa que

- *o 100 é uma caixinha que tem 5 20's dentro*

- *o 1000 é uma caixinha que tem 50 20's dentro*

e por aí vai ...

— *Hmm*

— *Quando a gente vê isso,*

a gente pode calcular quantas caixinhas de 20 o número tem

e daí a gente descobre quantos 1's estão faltando.

— *Hmm*

— *Mas ainda tem um pequeno problema.*

— *Qual é?*

— *O problema são as caixinhas de 10.*

Porque nessas caixinhas só cabe meio 20.

— *Hmm*

— *Mas daí, tem uma outra esperteza ...*

— *Qual é?*

— *A esperteza é contar quantos meio-20's o número tem.*

— *Ha ha ha! essa eu gostei ...*

— *Daí, a gente vê que*

- *o 10 é uma caixinha que tem 1 meio-20 dentro*

- *o 100 é uma caixinha que tem 10 meio-20's dentro*

- *o 1000 é uma caixinha que tem 100 meio-20's dentro*

- *e por aí vai ...*

Isso significa que, jogando o último dígito do número fora

$$1\ 5\ 4\ 2\ 3\ 1\cancel{7} \Rightarrow 1\ 5\ 4\ 2\ 3\ 1$$

a gente descobre quantos meio-20's o número tem.

— *Hmm*

— *Só que, se o 20 é uma caixinha falta 1*

então o meio-20 é uma caixinha falta meio-1

— *Por outro lado,*

aquele 7 da unidade que a gente jogou fora,

corresponde a 14 meio-1's.

— *Isso!*

— *E é por isso que a regra funciona ...*

— *É isso aí!*

Mais uma regra do 7

— *Quem pensaria numa coisa dessas, não é?*

— *Pois é ...*

— *Eu.*

— *Ah?*

— *Quer dizer, agora que eu vi essa regra*

eu posso inventar uma outra regra

que funciona do mesmo jeito que essa.

— *Vá, explique.*

— *Quer dizer, a gente pode usar caixinhas de 50 no raciocínio.*

Porque elas são caixinhas sobra 1 — (quando a gente forma grupos de 7)

— *Sim!*

— *Daí, jogando o último dígito fora*

a gente tem a quantidade de 1/5's de 50 que o número tem

— *He he he ...*

— *Por outro lado,*

o 7 da unidade que foi jogado fora

corresponde a 35 1/5's de 1.

Daí que, essa outra regra também funciona

→ Multiplique o último dígito por 5.

E some o resultado

ao número formado pelos outros dígitos.

Se aquilo que der for divisível por 7

então o seu número é divisível por 7.

— *Muito bom!*