

Matemática Discreta

aula 09: Introdução ao raciocínio matemático

1 Introdução

Qual é a diferença entre o raciocínio lógico e o raciocínio matemático?

Bom, essa é a diferença que há entre um chapéu e um número.

Quer dizer, um chapéu é um chapéu.

Mas um número pode ser muitas coisas diferentes.

Por exemplo,

$$\begin{array}{rclclcl} 4 & = & 2 & + & 2 & & 4 & = & 3 & + & 1 \\ 4 & = & 2 & \times & 2 & & 4 & = & \bullet & \bullet \\ 4 & = & 2^2 & & & & & & \bullet & \bullet \end{array}$$

e por aí vai ...

Quer dizer, o ponto é que um número pode ser desmontado de várias maneiras diferentes.

E cada maneira de desmontar pode nos dar um raciocínio diferente.

Vejamos como a coisa funciona.

2 Mil e uma maneiras de raciocinar

Abrindo um livro de matemática, a gente encontra o seguinte

$$\rightarrow 2^{2n} - 1 \text{ é divisível por } 3, \text{ } p/n = 1, 2, 3, \dots$$

Mas será que é mesmo?

Bom, vamos ver.

E para ver, a gente começa com o caso mais simples

$$2^2 - 1$$

Mas, o que é isso?

Bom, isso é um número desmontado.

Então, a gente pode remontá-lo para descobrir que número é esse.

O primeiro termo é o 4 desmontado

$$\begin{array}{c} \textcircled{2^2} - 1 \\ \downarrow \\ 4 - 1 \end{array}$$

E agora, o que nós temos aqui é o 3 desmontado

$$\begin{array}{c} \textcircled{4 - 1} \\ \downarrow \\ 3 \end{array}$$

A gente acabou de descobrir que

$$2^2 - 1 = 3$$

E é claro que isso é um número divisível por 3.

Legal.

Agora, a gente considera o próximo caso

$$2^4 - 1$$

Aqui a gente bate o olho, e já vê o 4 ali.

Daí, a gente sente vontade de desmontá-lo.

Mas como?

Bom, existem várias maneiras.

E a gente vai começar com essa aqui

$$2^{2+2} - 1$$

Daí, a gente lembra a regra das potências, e desmonta outra vez assim

$$2^2 \cdot 2^2 - 1$$

para reescrever assim

$$4 \cdot 2^2 - 1$$

Sim! o 4 outra vez.

Então a gente pode desmontá-lo

$$(3 + 1) \cdot 2^2 - 1$$

Agora, a gente faz essa continha

$$3 \cdot 2^2 + 2^2 - 1$$

E vê uma coisa conhecida ali

$$3 \cdot 2^2 + \textcircled{2^2 - 1}$$

Pois é, esse é o 3 desmontado.

Então, a gente pode reescrever assim

$$3 \cdot 2^2 + 3$$

Aqui, a gente bota o 3 em evidência

$$3 \cdot (2^2 + 1)$$

E nesse ponto, já dá pra ver que a coisa é divisível por 3.

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Porque essa não é a única maneira de desmontar o 4.

Quer dizer, olhando outra vez para isso

$$2^4 - 1$$

a gente desmonta a coisa assim

$$2^{2 \cdot 2} - 1$$

Daí, a gente lembra outra regra das potências, e desmonta a coisa assim

$$(2^2)^2 - 1$$

E agora?

Bom, agora é a hora de um truque sujo.

Quer dizer, todo mundo sabe que 1^2 é igual a 1.

Então, a gente pode reescrever a coisa assim

$$(2^2)^2 - 1^2$$

Sim! uma diferença de quadrados.

E todo mundo sabe que

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

— (*ou será que não?*)

Então agora, a gente pode desmontar a nossa expressão assim

$$(2^2)^2 - 1^2 = (2^2 - 1) \cdot (2^2 + 1)$$

Sim, apareceu uma coisa conhecida ali.

Quer dizer, o primeiro termo é o 3 desmontado.

Então, a gente pode reescrever a coisa assim

$$3 \cdot (2^2 + 1)$$

E nesse ponto, já dá pra ver que a coisa é divisível por 3.

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, olhando para isso outra vez

$$(2^2)^2 - 1$$

a gente pode fazer a continha dentro dos parênteses

$$(4)^2 - 1$$

e depois desmontar o 4 assim

$$\left(\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \right)^2 - 1$$

Mas o que é isso?

Bom, isso é outro truque sujo.

Quer dizer, o que nós temos ali é um quadrado ao quadrado.

Só que isso é a mesma coisa que um quadrado vezes um quadrado

$$\left(\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \right)$$

O que é a mesma coisa que um quadrado de quadrados

$$\begin{array}{cc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

— (*um quadrado onde cada vértice é um quadrado*)

Daí a gente nota que a expressão está dizendo pra gente jogar fora 1 pontinho da figura

$$\left(\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \right)^2 - 1 = \begin{array}{cc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \rightarrow \bullet$$

E fazendo isso, a gente vê que aquilo que sobra é divisível por 3

$$\left(\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \right)^2 - 1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \rightarrow \bullet$$

— (*grupinhos com 3 coisas dentro ...*)

Não é legal?

2.1 Generalização

Sim, mas a gente não está fazendo progresso.

Quer dizer, a gente só está fazendo a mesma coisa várias vezes.

Então para andar pra frente, a gente considera o próximo caso

$$2^6 \equiv 1$$

Nesse ponto já é fácil desmontar o 6 assim

$$2^{2+4} \equiv 1$$

Aqui a gente não olha para o 4 — (*porque?*)

E prestando atenção no 2, a gente desmonta a coisa assim

$$2^2 \cdot 2^4 \equiv 1$$

Daí a gente faz a continha

$$4 \cdot 2^4 \equiv 1$$

desmonta o 4 assim

$$(3 + 1) \cdot 2^4 \equiv 1$$

e faz a continha outra vez

$$3 \cdot 2^4 + 2^4 \equiv 1$$

Nesse ponto, a gente observa o seguinte

$$\underbrace{3 \cdot 2^4}_{\text{div. } p/3} + \underbrace{2^4}_{\text{div. } p/3} \equiv 1$$

Sim! a gente caiu no caso anterior.

A gente já sabe que o caso anterior é divisível por 3.

E isso permite ver que esse caso também é.

Quando a gente entende isso, dá vontade de olhar para o próximo caso

$$2^8 \equiv 1$$

E aqui, é só fazer a mesma coisa outra vez

$$2^8 \equiv 1$$

$$\Rightarrow 2^{2+6} \equiv 1$$

$$\Rightarrow 2^2 \cdot 2^6 \equiv 1$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 4 \cdot 2^6 - 1 \\
&\Rightarrow (3 + 1) \cdot 2^6 - 1 \\
&\Rightarrow \underbrace{3 \cdot 2^6}_{\text{div. } p/3} + \underbrace{2^6 - 1}_{\text{div. } p/3} \\
&\Rightarrow \text{divisível por } 3
\end{aligned}$$

— (*um raciocínio esquemático*)

Agora acabou.

Quer dizer, esse raciocínio permite que a gente pule para a próxima potência par.

E fazendo isso pra sempre, a gente passa por todas as potências pares.

Então agora, a gente tem um raciocínio para mostrar que

$$\rightarrow 2^{2n} - 1 \text{ é divisível por } 3, \quad p/n = 1, 2, 3, \dots$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Porque essa não é a única maneira de desmontar o 6.

Quer dizer, olhando para isso outra vez

$$2^6 - 1$$

a gente desmonta a coisa assim

$$2^{2 \cdot 3} - 1$$

Daí, lembrando da regra das potências, a gente desmonta outra vez assim

$$(2^2)^3 - 1$$

E dessa vez, a gente usa o truque sujo do 1^3

$$(2^2)^3 - 1^3$$

E agora?

Bom, agora é a hora de outro truque sujo.

Quer dizer, o truque é desmontar a diferença de cubos assim

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

Porque?

Ora, porque dá certo.

Veja só

$$\begin{aligned}(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) &= a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + \cancel{ab^2} - b^3 \\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

Dáí, usando esse truque para desmontar a diferença de cubos, a gente obtém o seguinte

$$(2^2)^3 - 1^3 = (2^2 - 1) \cdot \left((2^2)^2 + 2^2 \cdot 1 + 1^2 \right)$$

Sim! a gente caiu no primeiro caso outra vez

$$\boxed{(2^2 - 1) \cdot \left((2^2)^2 + 2^2 \cdot 1 + 1^2 \right)}$$

A gente já sabe que o primeiro caso é divisível por 3.

E isso nos permite ver que esse caso também é.

Quando a gente vê isso, a gente entende que toda potência par vai cair no primeiro caso.

Então, a gente olha para isso

$$2^{2n} - 1$$

E faz a mesma coisa outra vez

$$\begin{aligned}2^{2n} - 1 \\ \Rightarrow (2^2)^n - 1 \\ \Rightarrow (2^2)^n - 1^n \\ \Rightarrow (2^2 - 1) \cdot \left((2^2)^{n-1} + (2^2)^{n-2} \cdot 1 + \dots + 1^{n-1} \right) \\ \Rightarrow 3 \cdot \left((2^2)^{n-1} + (2^2)^{n-2} \cdot 1 + \dots + 1^{n-1} \right) \\ \Rightarrow \text{divisível por 3}\end{aligned}$$

E agora, a gente tem outro raciocínio para mostrar que

$$\rightarrow 2^{2n} - 1 \text{ é divisível por 3, } p/n = 1, 2, 3, \dots$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Porque essa não é a única maneira de desmontar o 6.

Quer dizer, olhando outra vez para isso

$$2^6 - 1$$

a gente desmonta a coisa assim

$$2^{2+2+2} - 1$$

Daí, lembrando da regra das potências, a gente desmonta assim

$$(2^2) \cdot (2^2) \cdot (2^2) = 1$$

faz as continhas dentro dos parênteses

$$(4) \cdot (4) \cdot (4) = 1$$

e depois desmonta assim

$$\left(\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \right) = 1$$

Certo.

Aqui a gente já sabe que multiplicar por um quadrado é a mesma coisa que montar um quadrado com a coisa que é multiplicada nos vértices.

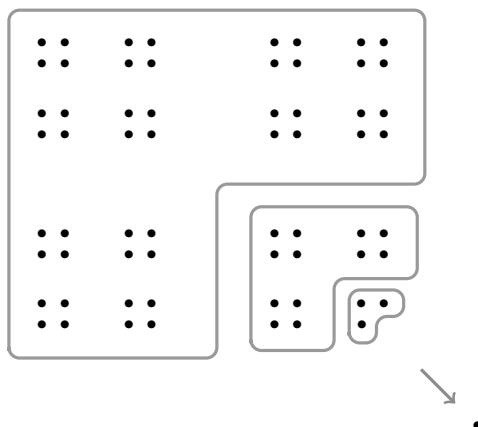
Então, a coisa fica assim

$$\left(\begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \end{array} \right) = 1$$

e depois assim

$$\begin{array}{cc} \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \\ \\ \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{smallmatrix} \end{array}$$

Agora, a gente aplica o nosso truque outra vez

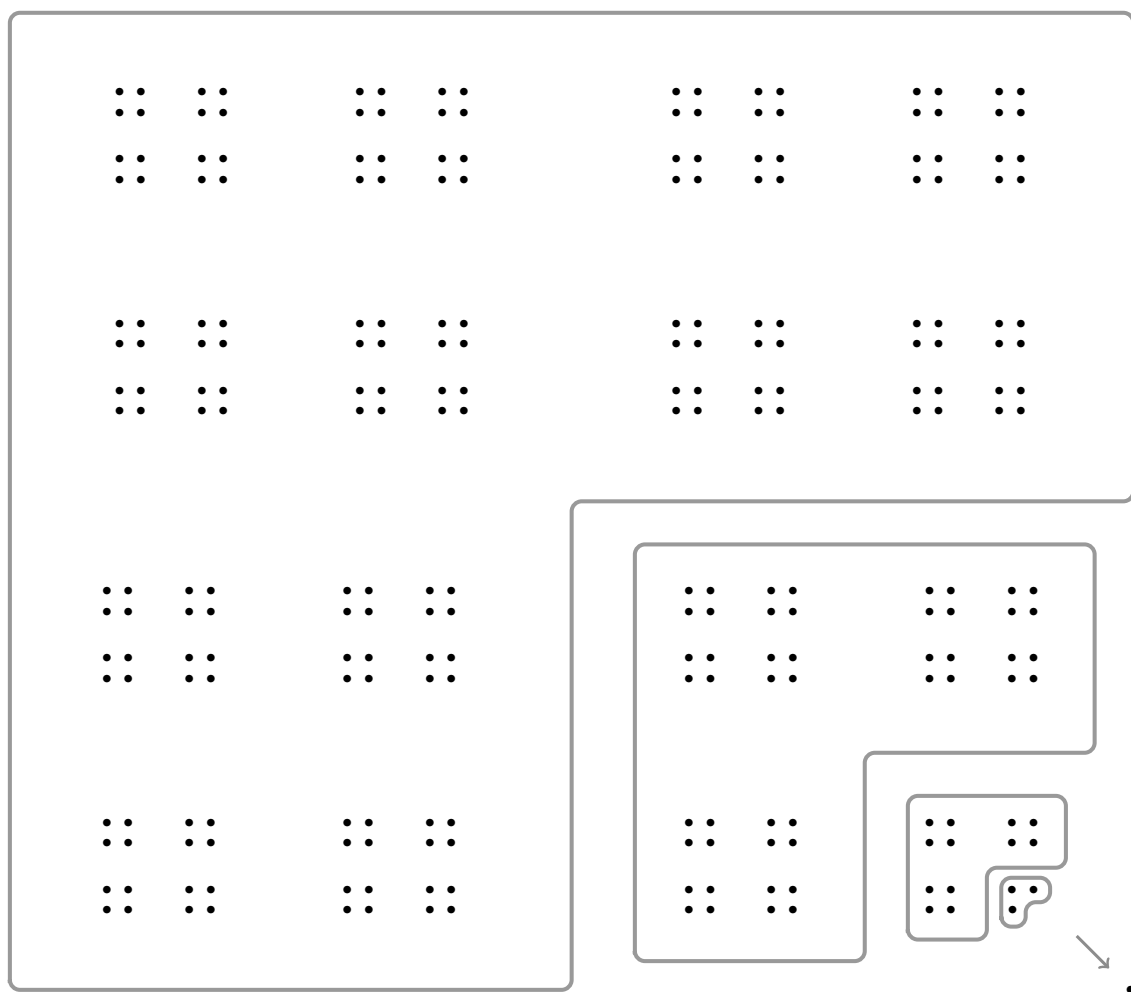


— (*grupinhos com 3 coisas dentro ...*)

E vê que a coisa é divisível por 3.

Finalmente, ao olhar para essa figura, a gente já vê o padrão repetitivo.

E já pode adivinhar que vai dar certo no próximo caso outra vez



— (*grupinhos com 3 coisas dentro ...*)

E agora, a gente tem mais um raciocínio para mostrar que

$$\rightarrow 2^{2n} - 1 \text{ é divisível por } 3, \text{ p/ } n = 1, 2, 3, \dots$$

Legal, não é?

2.2 Mais um raciocínio

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Porque ainda existem outras maneiras de desmontar.

Começando outra vez aqui

$$2^{2n} - 1$$

a gente reescreve assim

$$(2^2)^n - 1$$

e depois assim

$$(4)^n - 1$$

e depois assim

$$(3 + 1)^n - 1$$

E agora a gente vai olhar para essa potência.

Quando $n = 1$, nós temos isso aqui

$$3 + 1$$

E quando $n = 2$, nós temos isso aqui

$$(3 + 1)^2$$

que é igual a isso

$$(3 + 1) \cdot (3 + 1)$$

que é igual a isso

$$3^2 + 2 \cdot 3 + 1$$

Dáí, a esperteza é reescrever a coisa assim

$$3 \cdot (3 + 2) + 1$$

Quer dizer, isso é um múltiplo de 3 mais 1.

O que a gente pode reescrever assim

$$3 \cdot K + 1$$

— *(porque não importa que múltiplo é esse ...)*

Certo.

Agora a gente considera o próximo caso

$$(3 + 1)^3$$

que a gente reescreve assim

$$(3 + 1) \cdot (3 + 1)^2$$

Quer dizer, isso foi uma esperteza, para fazer aparecer o caso anterior.

Porque a gente já sabe que o caso anterior é um múltiplo de 3 mais 1

$$(3 + 1) \cdot (3K + 1)$$

Fazendo a conta, a gente obtém

$$3^2 K + 3 + 3K + 1$$

Depois bota o 3 em evidência

$$3 \cdot (3K + 1 + K) + 1$$

Sim! deu um múltiplo de 3 mais 1 outra vez.

Aqui já dá pra ver a coisa entrando em repetição.

E para deixar isso mais claro, a gente escreve o raciocínio esquemático do próximo caso

$$\begin{aligned}
 & (3 + 1)^4 \\
 \Rightarrow & (3 + 1) \cdot (3 + 1)^3 \\
 \Rightarrow & (3 + 1) \cdot (3K + 1) \\
 \Rightarrow & 3^2 K + 3 + 3K + 1 \\
 \Rightarrow & 3 \cdot (3K + 1 + K) + 1 \\
 \Rightarrow & 3L + 1
 \end{aligned}$$

Quer dizer, a gente acabou de descobrir que

$$\begin{aligned}
 \rightarrow & (3 + 1)^n \text{ é sempre uma coisa da forma } 3K + 1 \\
 & \text{— (i.e., um múltiplo de 3 mais 1 ...)}
 \end{aligned}$$

Agora, olhando outra vez para a nossa expressão

$$(3 + 1)^n - 1$$

a gente pode reescrever a coisa assim

$$3K + 1 - 1$$

e depois assim

$$3K$$

E aqui já é bem fácil de ver que isso é sempre divisível por 3.

Legal, não é?

3 Outra generalização

Virando a página do livro de matemática, a gente encontra outro exemplo

$$\rightarrow 3^{2n} - 1 \text{ é sempre divisível por 8}$$

Mas será que é mesmo?

Bom, vamos ver.

Quer dizer, nesse ponto a gente já está esperto, e pode reescrever a coisa assim

$$(3^2)^n - 1$$

e depois assim

$$9^n - 1$$

E agora, nós podemos usar qualquer um dos raciocínios que a gente acabou de ver.

O mais simples deles é ver a repetição passo a passo.

Quer dizer, quando $n = 1$, nós temos

$$9 - 1 = 8$$

o que é divisível por 8.

Quando $n = 2$, nós temos

$$9^2 - 1$$

o que a gente reescreve assim

$$9^{1+1} - 1$$

e depois assim

$$9 \cdot 9 - 1$$

Aqui, a gente desmonta o primeiro 9

$$(8 + 1) \cdot 9 - 1$$

e faz a continha para obter

$$8 \cdot 9 + 9 - 1$$

Daí, é só observar que

$$\underbrace{8 \cdot 9}_{\text{div. p/ 8}} + \underbrace{9 - 1}_{\text{div. p/ 8 (caso anterior)}}$$

Aqui já dá pra ver a coisa entrando em repetição.

E a gente escreve o raciocínio esquemático do próximo caso para deixar isso mais claro

$$\begin{aligned} & 9^3 - 1 \\ \Rightarrow & 9^{2+1} - 1 \\ \Rightarrow & 9 \cdot 9^2 - 1 \\ \Rightarrow & (8 + 1) \cdot 9^2 - 1 \\ \Rightarrow & \underbrace{8 \cdot 9^2}_{\text{div. p/ 8}} + \underbrace{9^2 - 1}_{\text{div. p/ 8 (caso anterior)}} \end{aligned}$$

Quer dizer, a coisa sempre dá certo.

E a gente pode concluir que

$$\rightarrow 3^{2n} - 1 \text{ é sempre divisível por } 8$$

Legal, não é?

Sim, mas essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Quer dizer, começando outra vez aqui

$$9^n - 1$$

a gente pode reescrever a coisa assim

$$(8 + 1)^n - 1$$

Sim! a gente já viu algo parecido com isso.

Quer dizer, essa potência tem a cara de um múltiplo de 8 mais 1.

E já dá pra ver isso examinando os primeiros casos

- $8 + 1$
- $(8 + 1)^2 = 8^2 + 2 \cdot 8 + 1 = 8K + 1$
- $(8 + 1)^3 = (8 + 1) \cdot (8 + 1)^2 = (8 + 1) \cdot (8K + 1) = 8L + 1$

Então, a gente pode reescrever a nossa expressão assim

$$8K + 1 - 1$$

e depois assim

$$8K$$

E aqui já dá pra ver que a coisa é sempre divisível por 8.

3.1 Chegando na regra

O próximo exemplo do livro é

$$\rightarrow 5^n - 1 \text{ é sempre divisível por } 4$$

Mas esse já não tem mais graça ...

Quer dizer, é bem fácil reescrever a coisa assim

$$(4 + 1)^n - 1$$

E é bem fácil ver que essa potência sempre dá um múltiplo de 4 mais 1.

Então, a gente pode reescrever a coisa assim

$$4K + 1 - 1$$

e depois assim

$$4 \mid K$$

o que é sempre uma coisa divisível por 4.

Dáí, só de bater o olho a gente já vê que isso é verdade

$$\rightarrow 6^n - 1 \text{ é sempre divisível por } 5$$

E isso aqui também

$$\rightarrow 7^n - 1 \text{ é sempre divisível por } 6$$

Quer dizer, já apareceu um padrão.

E a gente pode escrever esse padrão na forma de uma regra

$$\Rightarrow K^n - 1 \text{ é sempre divisível por } K - 1$$

— (qualquer coisa elevado a n menos um é sempre divisível por qualquer coisa menos um)

3.2 Raciocinando com a regra

Agora que nós temos uma regra, nós podemos usar a regra para raciocinar.

Então a gente vai no livro outra vez, e encontra o seguinte

$$\rightarrow 5^{2n} - 1 \text{ é sempre divisível por } 3$$

Mas isso não tem o formato da regra.

E agora?

Bom, agora a gente vai ter que trabalhar um pouquinho.

Quer dizer, a ideia é reescrever a coisa assim

$$(5^2)^n - 1$$

e depois assim

$$25^n - 1$$

Pronto.

Aqui nós temos uma coisa que está no formato da regra.

E a regra nos diz que isso é divisível por 24.

Mas, tudo o que é divisível por 24 também é divisível por 3 — (*porque?*)

Logo, nós podemos concluir que

$$\rightarrow 5^{2n} - 1 \text{ é sempre divisível por } 3$$

A seguir nós vamos ver mais exemplos.

Exemplos

a. Divisibilidade por 5

Agora considere o seguinte

$$\rightarrow 2^{4n+1} - 2 \text{ é sempre divisível por } 5$$

Mas uma vez, a coisa não está no formato da regra.

Mas a gente pode trabalhar um pouquinho.

Quer dizer, o primeiro passo é descer o 1 do expoente

$$2 \cdot 2^{4n} - 2$$

Daí, a gente coloca o 2 em evidência

$$2 \cdot (2^{4n} - 1)$$

Dentro dos parênteses já apareceu uma coisa familiar.

Mas ainda é preciso trabalhar mais um pouquinho.

Então, a gente reescreve a coisa assim

$$2 \cdot ((2^4)^n - 1)$$

e depois assim

$$2 \cdot (16^n - 1)$$

Pronto. Agora a regra nos diz que

$$2 \cdot \underbrace{(16^n - 1)}_{\text{div. p/ } 15}$$

Só que, tudo o que é divisível por 15 também é divisível por 5.

◇

b. O truque do zero

Agora considere o seguinte

$$\rightarrow 5^{2n} - 3^{2n} \text{ é sempre divisível por } 4$$

Esse exemplo é bem diferente, porque ele tem duas potências.

Mas isso não é nada que um pequeno truque sujo não resolva.

Quer dizer, nós começamos reescrevendo a coisa assim

$$(5^2)^n - (3^2)^n$$

e depois assim

$$25^n - 9^n$$

Daí, a gente soma 0 à nossa expressão

$$25^n - 9^n + 0$$

— (*sim, esse é o truque sujo ...*)

O próximo passo é desmontar o zero assim

$$25^n - 9^n - 1 + 1$$

A seguir, nós rearrumamos as coisas

$$25^n - 1 - (9^n - 1)$$

E agora é só aplicar a nossa regra

$$\underbrace{25^n - 1}_{\text{div. p/24}} - \underbrace{(9^n - 1)}_{\text{div. p/8}}$$