

Matemática Discreta

aula 10: Mais jogos de desmontação com números

1 Introdução

Hoje nós vamos começar olhando para isso aqui

$$2^6 - 1$$

A gente já sabe que isso é divisível por 3.

Porque na aula passada a gente viu que

$$\rightarrow 2^{2n} - 1 \text{ é sempre divisível por 3}$$

Mas agora, nós vamos fazer uma coisa diferente.

Quer dizer, a ideia é reescrever a coisa assim

$$2^{2 \cdot 3} - 1$$

e depois assim

$$(2^3)^2 - 1$$

e depois assim

$$(2^3)^2 - 1^2$$

Sim! isso é uma diferença de quadrados.

O que a gente pode desmontar assim

$$(2^3 - 1) \cdot (2^3 + 1)$$

A gente já sabe que isso é divisível por 3.

Mas o primeiro termo não é

$$\underbrace{(2^3 - 1)}_7 \cdot (2^3 + 1)$$

Aqui nós descobrimos que

$$2^3 + 1 \text{ é divisível por 3}$$

— (*2 elevado a ímpar mais 1 ...*)

E vendo isso, a gente sente vontade de perguntar

$$\rightarrow \text{Será que } 2^{2n+1} + 1 \text{ é sempre divisível por 3?}$$

Bom, vamos ver.

2 Mais jogos de desmontação de números

Nós já vimos que a coisa funciona para $n = 1$.

E agora a gente olha para o caso $n = 2$

$$2^5 = 1$$

Aqui a gente podia fazer a conta.

Mas é mais legal fazer desmontação.

Então, a gente desmonta o 5 assim

$$2^{2+3} = 1$$

Reescreve a coisa assim

$$2^2 \cdot 2^3 = 1$$

e depois assim

$$4 \cdot 2^3 = 1$$

Nesse ponto, a gente desmonta o 4

$$(3 + 1) \cdot 2^3 = 1$$

Faz a continha

$$3 \cdot 2^3 + 2^3 = 1$$

E observa que

$$\underbrace{3 \cdot 2^3}_{\text{div. } p/3} + \underbrace{2^3 + 1}_{\text{div. } p/3 \text{ (caso anterior)}}$$

Aqui já dá pra ver a coisa entrando em repetição.

E a gente escreve o raciocínio esquemático do próximo caso, para deixar isso mais claro

$$\begin{aligned} 2^7 &= 1 \\ \Rightarrow 2^{2+5} &= 1 \\ \Rightarrow 2^2 \cdot 2^5 &= 1 \\ \Rightarrow 4 \cdot 2^5 &= 1 \\ \Rightarrow (3 + 1) \cdot 2^5 &= 1 \\ \Rightarrow \underbrace{3 \cdot 2^5}_{\text{div. } p/3} + \underbrace{2^5 + 1}_{\text{div. } p/3 \text{ (caso anterior)}} \end{aligned}$$

Agora, a gente já pode concluir que

$$\rightarrow 2^{2n+1} + 1 \text{ é sempre divisível por } 3$$

Mas, essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Porque existem outras maneiras de desmontar.

Quer dizer, vamos olhar outra vez para isso

$$2^{2n+1} + 1$$

Daí, a gente desce o 1 do expoente

$$2 \cdot 2^{2n} + 1$$

E reescreve a coisa assim

$$2^{2n} + 2^{2n} + 1$$

Aqui, a gente aplica o truque do zero duas vezes

$$2^{2n} + 2^{2n} + 0 + 0 + 1$$

Desmonta o zero duas vezes

$$2^{2n} + 2^{2n} - 1 + 1 - 1 + 1 + 1$$

E rearruma as coisas assim

$$(2^{2n} - 1) + (2^{2n} - 1) + 1 + 1 + 1$$

Agora, é só observar que

$$\underbrace{(2^{2n} - 1)}_{\text{div. p/3}} + \underbrace{(2^{2n} - 1)}_{\text{div. p/3}} + \underbrace{1 + 1 + 1}_{\text{div. p/3}}$$

3 Generalização

Agora, a gente considera outro exemplo com expoente ímpar

$$\rightarrow 3^{2n+1} + 1 \text{ é sempre divisível por 4}$$

Será?

Bom, vamos ver.

Quer dizer, o primeiro passo é descer o 1 do expoente

$$3 \cdot 3^{2n} + 1$$

Daí, a gente aplica o truque do zero

$$3 \cdot 3^{2n} + 0 + 1$$

Desmonta o zero assim

$$3 \cdot 3^{2n} - 3 + 3 + 1$$

Coloca o 3 em evidência, e faz uma continha

$$3 \cdot (3^{2n} - 1) + 4$$

Nesse ponto, a gente reescreve a potência dentro dos parênteses

$$3 \cdot (9^n - 1) + 4$$

E observa que

$$3 \cdot \underbrace{(9^n - 1)}_{\text{div. p/8}} + \underbrace{4}_{\text{div. p/4}}$$

Deu certo! — *(porque tudo o que é divisível por 8 também é divisível por 4*

Mas ainda não deu para ver direito o que está acontecendo ...

Então agora, a gente raciocina de outro jeito.

Quer dizer, a gente começa aqui

$$3^{2n+1} + 1$$

E a esperteza dessa vez é reescrever a coisa assim

$$(4 - 1)^{2n+1} + 1$$

Aqui nós temos uma potência ímpar de $4 - 1$.

E a ideia é olhar para isso.

No primeiro caso, nós temos

$$4 - 1$$

— *(um múltiplo de 4 menos 1 ...)*

No próximo caso, nós temos

$$(4 - 1)^3$$

O que a gente reescreve assim

$$(4 - 1)^2 \cdot \underbrace{(4 - 1)}_{\text{caso anterior}}$$

e depois assim

$$(4^2 - 2 \cdot 4 + 1) \cdot (4 - 1)$$

e depois assim

$$(4K + 1) \cdot (4 - 1)$$

e depois assim

$$4^2 K - 4K + 4 - 1$$

e depois assim

$$4L - 1$$

Sim! deu um múltiplo de 4 menos 1 outra vez.

Aqui já dá pra ver a coisa entrando em repetição.

E a gente escreve o raciocínio esquemático do próximo caso, para deixar isso mais claro

$$\begin{aligned}
 & (4 - 1)^5 \\
 \Rightarrow & (4 - 1)^2 \cdot \underbrace{(4 - 1)^3}_{\text{(caso anterior)}} \\
 \Rightarrow & (4^2 - 2 \cdot 4 + 1) \cdot (4L - 1) \\
 \Rightarrow & (4K + 1) \cdot (4L - 1) \\
 \Rightarrow & 4^2 KL - 4K + 4L - 1 \\
 \Rightarrow & 4M - 1
 \end{aligned}$$

Pronto.

A gente acabou de descobrir o seguinte

$$\rightarrow (4 - 1)^{\textit{ímpar}} \textit{ sempre dá um múltiplo de 4 menos 1}$$

Agora, a gente volta para a nossa expressão

$$(4 - 1)^{2n+1} + 1$$

E reescreve a coisa assim

$$4K - 1 + 1$$

e depois assim

$$4K$$

— (*uma coisa que é divisível por 4 ...*)

Portanto, a gente pode concluir que

$$\rightarrow 3^{2n+1} + 1 \textit{ é sempre divisível por 4}$$

3.1 Chegando na regra

Agora considere esse outro exemplo

$$\rightarrow 4^{2n+1} + 1 \textit{ é sempre divisível por 5}$$

Será?

Bom, a ideia é reescrever a coisa assim

$$(5 - 1)^{2n+1} + 1$$

Daí, não é difícil ver que

$$\rightarrow (5 - 1)^{\text{ímpar}} \text{ sempre dá um múltiplo de 5 menos 1}$$

— (repetindo o raciocínio aí de cima)

Logo, a gente pode reescrever a nossa expressão assim

$$5K - 1 + 1$$

e depois assim

$$5K$$

— (uma coisa que é divisível por 5)

Portanto, a gente pode concluir que

$$\rightarrow 4^{2n+1} + 1 \text{ é sempre divisível por 5}$$

Quer dizer, é sempre a mesma coisa — (o raciocínio sempre funciona ...)

Então, a gente pode escrever uma regra

$$\Rightarrow K^{2n+1} + 1 \text{ é sempre divisível por } K + 1$$

— (qualquer coisa elevado a ímpar mais um é sempre divisível por qualquer coisa mais um)

Essa é a nossa segunda regra para a divisibilidade de expressões com potências.

E a gente pode dar nome às regras para organizar as coisas

Regra do $K - 1$:

$$\Rightarrow K^n - 1 \text{ é sempre divisível por } K - 1$$

Regra do $K + 1$:

$$\Rightarrow K^{2n+1} + 1 \text{ é sempre divisível por } K + 1$$

3.2 O outro lado da regra

Mas, isso ainda não está legal.

Porque a regra do $K + 1$ só funciona com expoentes ímpares.

Quer dizer, seria legal se a coisa também funcionasse com os expoentes pares.

O problema é que não funciona.

Veja só

$$2^2 + 1 = 5, \text{ não é divisível por 3}$$

$$2^4 + 1 = 17, \text{ não é divisível por 3}$$

$$2^6 + 1 = 65, \text{ não é divisível por 3}$$

E agora?

Bom, agora é a hora para uma pequena esperteza.

Quer dizer, o que há de comum em todos os casos acima?

Bom, o que há em comum é o seguinte

$$\begin{array}{rccccccc} 2^2 & + & 1 & = & 3 & + & 2 \\ 2^4 & + & 1 & = & 15 & + & 2 \\ 2^6 & + & 1 & = & 63 & + & 2 \end{array}$$

Sim! em todos os casos nós temos um múltiplo de 3 mais 2.

Logo se a gente tira 2, aquilo que sobra é um múltiplo de 3.

Então, o caso do expoente para deveria ser assim

$$\rightarrow 2^{2n} + 1 - 2 \text{ é sempre divisível por } 3$$

O que é a mesma coisa que

$$\rightarrow 2^{2n} - 1 \text{ é sempre divisível por } 3$$

Sim, isso é uma coisa que a gente já sabe.

Mas agora, a gente pode perguntar

$$\rightarrow \text{Será que } 3^{2n} - 1 \text{ é sempre divisível por } 4?$$

Bom, vamos ver.

O primeiro passo é desmontar o 3 assim

$$(4 - 1)^{2n} - 1$$

E agora, a gente examina as potências pares de $4 - 1$.

No primeiro caso, nós temos

$$(4 - 1)^2$$

O que a gente reescreve assim

$$(4 - 1) \cdot (4 - 1)$$

e depois assim

$$4^2 - 2 \cdot 4 + 1$$

e depois assim

$$4K + 1$$

— (um múltiplo de 4 mais 1 ...)

No segundo caso, nós temos

$$(4 - 1)^4$$

O que a gente reescreve assim

$$(4 - 1)^{2+2}$$

e depois assim

$$(4 - 1)^2 \cdot \underbrace{(4 - 1)^2}_{\text{(caso anterior)}}$$

e depois assim

$$(4^2 - 2 \cdot 4 + 1) \cdot (4K + 1)$$

e depois assim

$$(4L + 1) \cdot (4K + 1)$$

e depois assim

$$4^2 LK + 4L + 4K + 1$$

e depois assim

$$4M + 1$$

— (*um múltiplo de 4 mais 1 ...*)

Aqui já dá pra ver a coisa entrando em repetição.

E a gente apresenta o raciocínio esquemático do próximo caso, para deixar isso mais claro

$$\begin{aligned} & (4 - 1)^6 \\ \Rightarrow & (4 - 1)^2 \cdot \underbrace{(4 - 1)^4}_{\text{(caso anterior)}} \\ \Rightarrow & (4^2 - 2 \cdot 4 + 1) \cdot (4M + 1) \\ \Rightarrow & (4K + 1) \cdot (4M + 1) \\ \Rightarrow & 4^2 KM + 4K + 4M + 1 \\ \Rightarrow & 4L + 1 \end{aligned}$$

Quer dizer, a gente acabou de descobrir que

$$\rightarrow (4 - 1)^{\text{par}} \text{ sempre dá um múltiplo de 4 mais 1}$$

Agora, a gente volta para a nossa expressão

$$(4 - 1)^{2n} - 1$$

E reescreve a coisa assim

$$4K + 1 - 1$$

e depois assim

$$4K$$

— (uma coisa que é divisível por 4)

Agora, já é fácil ver que a coisa funciona sempre.

E isso nos dá o outro lado da regra do $K + 1$

$$\Rightarrow K^{2n} - 1 \text{ é sempre divisível por } K + 1$$

— (qualquer coisa elevado a par menos um é sempre divisível por qualquer coisa mais um)

E em resumo, o que nós temos é o seguinte

Regra do $K - 1$:

$$\Rightarrow K^n - 1 \text{ é sempre divisível por } K - 1$$

Regra do $K + 1$:

$$(a) \Rightarrow K^{2n+1} + 1 \text{ é sempre divisível por } K + 1$$

$$(b) \Rightarrow K^{2n} - 1 \text{ é sempre divisível por } K + 1$$

4 Raciocinando com as regras

Agora que a gente tem essas regras, nós podemos utiliza-las em nossos raciocínios.

Então a gente abre o livro de matemática, e encontra o seguinte

$$\rightarrow 7^n - 3^n \text{ é sempre divisível por } 4$$

Será?

Bom, vamos ver.

Quer dizer, a ideia é usar as regras que a gente acabou de aprender.

Para isso, a gente começa imaginando que o n é ímpar.

Então, a gente pode escrever

$$n = 2m + 1$$

E pode reescrever a nossa expressão assim

$$7^{2m+1} - 3^{2m+1}$$

Daí, a gente aplica o truque do zero

$$7^{2m+1} - 3^{2m+1} + 0$$

Desmonta o zero assim

$$7^{2m+1} - 3^{2m+1} + 1 - 1$$

Rearruma a coisa assim

$$7^{2m+1} + 1 = (3^{2m+1} + 1)$$

E observa que

$$\underbrace{7^{2m+1} + 1}_{\text{div. } p/8} = \underbrace{(3^{2m+1} + 1)}_{\text{div. } p/4}$$

[Regra K+1 (a)] [Regra K+1 (a)]

Legal.

Agora a gente imagina que o n é par.

Então, a gente pode escrever

$$n = 2m$$

E pode reescrever a nossa expressão assim

$$7^{2m} - 3^{2m}$$

Daí, a gente aplica o truque do zero

$$7^{2m} - 3^{2m} + 0$$

Desmonta o zero assim

$$7^{2m} - 3^{2m} = 1 + 1$$

Rearruma a coisa assim

$$7^{2m} - 1 = (3^{2m} - 1)$$

E observa que

$$\underbrace{7^{2m} - 1}_{\text{div. } p/8} = \underbrace{(3^{2m} - 1)}_{\text{div. } p/4}$$

[Regra K+1 (b)] [Regra K+1 (b)]

Legal, não é?

Vejamos mais exemplos.

Exemplos

a. Divisibilidade por 5

Considere o seguinte

$$\rightarrow 3^{2n} + 4^{n+1} \text{ é sempre divisível por } 4$$

Será?

Bom, vamos ver.

O primeiro passo é reescrever a coisa assim

$$(3^2)^n + 4^{n+1}$$

e depois assim

$$9^n + 4^{n+1}$$

Daí a esperteza é notar que se o n é par então $n + 1$ é ímpar — (*e vice-versa*)

E agora, a gente pode usar as nossas regras.

Quer dizer, imagine primeiro que n é par.

Então a gente pode escrever

$$n = 2m$$

E pode reescrever a nossa expressão assim

$$9^{2m} + 4^{2n+1}$$

Daí, a gente aplica o truque do zero

$$9^{2m} + 4^{2n+1} + 0$$

Desmonta o zero assim

$$9^{2m} + 4^{2n+1} - 1 + 1$$

Rearruma a coisa assim

$$9^{2m} - 1 + 4^{2n+1} + 1$$

E observa que

$$\underbrace{9^{2m} - 1}_{\text{div. } p/10} + \underbrace{4^{2n+1} + 1}_{\text{div. } p/5}$$

[Regra K+1 (b)] [Regra K+1 (a)]

Certo.

Agora imagine que o n é ímpar.

Então a gente pode escrever

$$n = 2m + 1$$

E pode reescrever a nossa expressão assim

$$9^{2m+1} + 4^{2n+2}$$

Daí, a gente aplica o truque do zero

$$9^{2m+1} + 4^{2n+2} + 0$$

Desmonta o zero assim

$$9^{2m+1} + 4^{2n+2} + 1 - 1$$

Rearruma a coisa assim

$$9^{2m+1} + 1 + 4^{2n+2} - 1$$

E observa que

$$\underbrace{9^{2m+1} + 1}_{\text{div. p/10}} + \underbrace{4^{2m+2} - 1}_{\text{div. p/5}}$$

[Regra K+1 (b)] [Regra K+1 (a)]

Legal, não é?

◇

b. Divisibilidade por 8

Considere o seguinte

$$\rightarrow 3^n + 7^n - 2 \text{ é sempre divisível por } 8$$

Será?

Bom, vamos ver.

Imagine primeiro que n é par.

Então, a gente pode escrever

$$n = 2m$$

E pode reescrever a nossa expressão assim

$$3^{2m} + 7^{2m} - 2$$

Daí, a gente desmonta o 2 assim

$$3^{2m} + 7^{2m} - 1 - 1$$

Rearruma a coisa assim

$$3^{2m} - 1 + 7^{2m} - 1$$

Reescreve a primeira potência assim

$$9^m - 1 + 7^{2m} - 1$$

E observa que

$$\underbrace{9^m - 1}_{\text{div. p/8}} + \underbrace{7^{2m} - 1}_{\text{div. p/8}}$$

[Regra K-1] [Regra K+1 (b)]

Certo.

Agora imagine que o n é ímpar.

Então, a gente pode escrever

$$n = 2m + 1$$

E pode reescrever a nossa expressão assim

$$3^{2m+1} + 7^{2m+1} - 2$$

Aqui, a gente desce o 1 dos dois expoentes

$$3 \cdot 3^{2m} + 7 \cdot 7^{2m} - 2$$

Aplica o truque do zero

$$3 \cdot 3^{2m} + 7 \cdot 7^{2m} - 2 + 0$$

Desmonta o zero assim

$$3 \cdot 3^{2m} + 7 \cdot 7^{2m} - 2 - 8 + 8$$

Faz uma continha

$$3 \cdot 3^{2m} + 7 \cdot 7^{2m} - 10 + 8$$

Desmonta o 10 assim

$$3 \cdot 3^{2m} + 7 \cdot 7^{2m} - 3 - 7 + 8$$

Rearruma a coisa assim

$$3 \cdot 3^{2m} - 3 + 7 \cdot 7^{2m} - 7 + 8$$

Coloca o 3 e o 7 em evidência

$$3 \cdot (3^{2m} - 1) + 7 \cdot (7^{2m} - 1) + 8$$

Reescreve a primeira potência

$$3 \cdot (9^m - 1) + 7 \cdot (7^{2m} - 1) + 8$$

E observa que

$$\underbrace{3 \cdot (9^m - 1)}_{\text{div. p/8}} + \underbrace{7 \cdot (7^{2m} - 1)}_{\text{div. p/8}} + \underbrace{8}_{\text{div. p/8}}$$

[Regra K-1] [Regra K+1 (b)]