

Matemática Discreta

aula 11: Generalização da generalização

1 Introdução

Hoje nós vamos começar com isso aqui

$$\rightarrow 10^n - 3^n \text{ é sempre divisível por } 7$$

E para refrescar as ideias, nós vamos utilizar a velha estratégia do caso anterior.

Quer dizer, é fácil ver que a coisa vale para $n = 1$

$$10 - 3 = 7$$

Dáí, para $n = 2$, a coisa fica assim

$$10^2 - 3^2$$

O que a gente reescreve assim

$$10^{1+1} - 3^{1+1}$$

e depois assim

$$10 \cdot 10 - 3 \cdot 3$$

Nesse ponto, a gente desmonta o 10

$$(7 - 3) \cdot 10 - 3 \cdot 3$$

Reescreve a coisa assim

$$7 \cdot 10 + 3 \cdot 10 - 3 \cdot 3$$

Coloca o 3 em evidência

$$7 \cdot 10 + 3 \cdot (10 - 3)$$

E observa que

$$\underbrace{7 \cdot 10}_{\text{div. p/7}} + 3 \cdot \underbrace{(10 - 3)}_{\text{div. p/7 (caso anterior)}}$$

Agora, já dá para escrever o raciocínio esquemático do próximo caso

$$10^3 - 3^3$$

$$\Rightarrow 10^{2+1} - 3^{2+1}$$

$$\Rightarrow 10 \cdot 10^2 - 3 \cdot 3^2$$

$$\Rightarrow (7 + 3) \cdot 10^2 - 3 \cdot 3^2$$

$$\Rightarrow 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2 - 3 \cdot 3^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{7 \cdot 10}_{\text{div. } p/7} + 3 \cdot \underbrace{(10^2 - 3^2)}_{\text{div. } p/7 \text{ (caso anterior)}}$$

Sim, a coisa já entrou em repetição.

E isso nos permite concluir que

$$\rightarrow 10^n - 3^n \text{ é sempre divisível por } 7$$

1.1 Raciocinando com as regras

Mas, a gente também tem as nossas regras.

E agora, nós vamos tentar utiliza-las para chegar no resultado.

Para isso, a gente começa imaginando que o n é par.

Então, a gente pode escrever

$$n = 2m$$

E pode reescrever a nossa expressão assim

$$10^{2m} - 3^{2m}$$

Mas, e agora?

Quer dizer, aqui o truque do zero não ajuda

$$10^{2m} - 3^{2m} + 0$$

Porque desmontando o zero assim

$$10^{2m} - 3^{2m} - 1 + 1$$

Nós chegamos nisso aqui

$$\underbrace{10^{2m} - 1}_{\text{div. } p/9 \text{ ou } 11} - \underbrace{(3^{2m} - 1)}_{\text{div. } p/2 \text{ ou } 4}$$

Só que isso ainda não diz nada ...

O que está acontecendo aqui?

2 Generalização da generalização

Bom, o que está acontecendo é que esse caminho não dá certo mesmo — (*as regras não ajudam nesse caso*)

Mas, essa não é a única maneira de fazer as coisas.

Porque ainda existem outras maneiras de desmontar.

Quer dizer, começando outra vez aqui

$$10^n - 3^n$$

A gente desmonta o 10 assim

$$(7 + 3)^n - 3^n$$

E agora, a gente examina o que acontece com essa potência.

Quer dizer, quando $n = 1$ nós temos

$$7 + 3$$

— (*um múltiplo de 7 mais 3 ...*)

Quando $n = 2$ nós temos

$$(7 + 3)^2$$

o que a gente reescreve assim

$$(7 + 3) \cdot \underbrace{(7 + 3)}_{\text{caso anterior}}$$

e depois assim

$$7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 3^2$$

e depois assim

$$7 \cdot (7 + 2 \cdot 3) + 3^2$$

e depois assim

$$7K + 3^2$$

— (*um múltiplo de 7 mais 3^2 ...*)

Hmm ...

Aqui já está começando a aparecer um padrão.

E para ver melhor o que está acontecendo, a gente escreve o raciocínio esquemático do próximo caso

$$\begin{aligned} & (7 + 3)^3 \\ \Rightarrow & (7 + 3) \cdot \underbrace{(7 + 3)^2}_{\text{caso anterior}} \\ \Rightarrow & (7 + 3) \cdot (7K + 3^2) \\ \Rightarrow & 7^2K + 7 \cdot 3^2 + 3 \cdot 7K + 3^3 \\ \Rightarrow & 7 \cdot (7K + 3^2 + 3K) + 3^3 \\ \Rightarrow & 7L + 3^3 \end{aligned}$$

— (*um múltiplo de 7 mais 3^3 ...*)

Sim! a coisa sempre funciona.

E nós acabamos de descobrir que

$$\rightarrow (7 + 3)^n \text{ sempre dá um múltiplo de 7 mais } 3^n$$

Agora, a gente volta para a nossa expressão

$$(7 + 3)^n - 3^n$$

Reescreve a coisa assim

$$7K + 3^n - 3^n$$

e depois assim

$$7K$$

— (uma coisa que é divisível por 7)

E já pode concluir que

$$\rightarrow 10^n - 3^n \text{ é sempre divisível por 7}$$

Legal, não é?

2.1 Uma nova regra

Sim, mas vamos considerar outro exemplo

$$\rightarrow 11^n - 4^n \text{ é sempre divisível por 7}$$

Será?

Bom, vamos ver.

Quer dizer, a esperteza é reescrever a coisa assim

$$(7 + 4)^n - 4^n$$

Porque daí, é fácil ver que

$$\rightarrow (7 + 4)^n \text{ sempre dá um múltiplo de 7 mais } 4^n$$

— (é só repetir o raciocínio aí de cima)

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$7K + 4^n - 4^n$$

e depois assim

$$7K$$

E aqui já dá pra ver que

$$\rightarrow 11^n - 4^n \text{ é sempre divisível por 7}$$

Mas não é só isso.

Quer dizer, aqui a gente também pode ver uma nova regra

$$\Rightarrow K^n - Q^n \text{ é sempre divisível por } K - Q$$

— *(qualquer coisa elevado a n menos qualquer coisa elevado a n é sempre divisível por qualquer coisa menos qualquer coisa)*

Porque o raciocínio sempre funciona nesse tipo de situação.

Essa é a Regra do $K - Q$.

Mas também não é só isso.

Porque acontece uma coisa engraçada aqui.

Quer dizer, veja o que acontece quando $Q = 1$

$$\rightarrow K^n - 1^n \text{ é sempre divisível por } K - 1$$

O que é a mesma coisa que

$$\rightarrow K^n - 1 \text{ é sempre divisível por } K - 1$$

Sim! essa é a Regra do $K - 1$.

E nós acabamos de descobrir que a Regra do $K - Q$ é uma generalização da Regra do $K - 1$

— *(ou uma generalização da generalização)*

Não é legal?

3 Outra generalização da generalização

Sim, mas agora que a gente viu isso, dá vontade de ver mais coisa.

Quer dizer, agora a gente vai procurar a generalização da Regra do $K + 1$.

Para isso, a gente abre o livro de matemática e encontra o seguinte

$$\rightarrow 7^{2n+1} + 4^{2n+1} \text{ é sempre divisível por } 11$$

Mas será que isso é verdade?

Bom, vamos ver.

Quer dizer, a esperteza aqui é desmontar o 7 assim

$$(11 - 4)^{2n+1} + 4^n$$

E agora, a gente examina o que acontece com as potências ímpares de $11 - 4$.

O primeiro caso é esse aqui

$$11 - 4$$

— *(um múltiplo de 11 menos 4 ...)*

O próximo caso é esse aqui

$$(11 - 4)^3$$

O que a gente reescreve assim

$$(11 - 4)^2 \cdot \underbrace{(11 - 4)}_{\text{caso anterior}}$$

e depois assim

$$(11^2 - 2 \cdot 11 \cdot 4 + 4^2) \cdot (11 - 4)$$

e depois assim

$$(11K + 4^2) \cdot (11 - 4)$$

e depois assim

$$11^2 k - 11 \cdot 4K + 4^2 \cdot 11 - 4^3$$

e depois assim

$$11L - 4^3$$

— (*um múltiplo de 11 menos 4^3 ...*)

Aqui já está começando a aparecer o padrão.

E para ver melhor o que está acontecendo, a gente escreve o raciocínio esquemático do próximo caso

$$\begin{aligned} & (11 - 4)^5 \\ \Rightarrow & (11 - 4)^2 \cdot \underbrace{(11 - 4)^3}_{\text{caso anterior}} \\ \Rightarrow & (11^2 - 2 \cdot 11 \cdot 4 + 4^2) \cdot (11K - 4^3) \\ \Rightarrow & (11L + 4^2) \cdot (11K - 4^3) \\ \Rightarrow & 11^2 KL - 11 \cdot 4^3 L + 11 \cdot 4^2 K - 4^5 \\ \Rightarrow & 11 \cdot (11KL + 4^3 L + 4^2 K) - 4^5 \\ \Rightarrow & 11M - 4^5 \end{aligned}$$

— (*um múltiplo de 11 menos 4^5 ...*)

Então agora, nós descobrimos que

$$\rightarrow (11 - 4)^{\textit{impar}} \textit{ sempre dá um múltiplo de 11 menos } 4^{\textit{impar}}$$

A seguir, a gente olha outra vez para a nossa expressão

$$(11 - 4)^{2n+1} + 4^n$$

Reescreve a coisa assim

$$11K = 4^{2n+1} + 4^{2n+1}$$

e depois assim

$$11K$$

E aqui já dá pra ver que

$$\rightarrow 7^{2n+1} + 4^{2n+1} \text{ é sempre divisível por } 11$$

Legal, não é?

3.1 Chegando na regra

Sim, e a gente pode fazer mais um só para ter certeza.

Considere esse exemplo

$$\rightarrow 8^{2n+1} + 5^{2n+1} \text{ é sempre divisível por } 13$$

Será?

Bom, vamos ver.

O primeiro passo é reescrever a coisa assim

$$(13 - 5)^{2n+1} + 5^{2n+1}$$

Porque daí é fácil de ver que

$$\rightarrow (13 - 5)^{\text{ímpar}} \text{ sempre dá um múltiplo de } 13 \text{ menos } 5^{\text{ímpar}}$$

Logo, a gente pode reescrever a coisa assim

$$13K = 5^{2n+1} + 5^{2n+1}$$

e depois assim

$$13K$$

E aqui já dá pra ver que

$$\rightarrow 8^{2n+1} + 5^{2n+1} \text{ é sempre divisível por } 13$$

Mas não é só isso.

Quer dizer, a qui a gente também pode ver uma nova regra

$$\Rightarrow K^{2n+1} + Q^{2n+1} \text{ é sempre divisível por } K + Q$$

— (qualquer coisa elevada a ímpar mais qualquer coisa elevada a ímpar é sempre divisível por qualquer coisa mais qualquer coisa)

Porque o raciocínio sempre funciona nessa situação.

Essa é a regra do $K + Q$.

E aqui também acontece uma coisa engraçada.

Quer dizer, veja o que acontece quando $Q = 1$

$$\Rightarrow K^{2n+1} + 1^{2n+1} \text{ é sempre divisível por } K + 1$$

O que é a mesma coisa que

$$\Rightarrow K^{2n+1} + 1 \text{ é sempre divisível por } K + 1$$

Sim, essa é a Regra do $K + 1$ (caso a).

E nós acabamos de descobrir que a Regra do $K + Q$ é uma generalização da Regra do $K + 1$ (caso a).

— (ou, uma generalização da generalização)

Legal, não é?

3.2 O outro lado da generalização da generalização

Sim, mas ainda falta ver a generalização do caso b.

E para isso, a gente considera esse exemplo

$$\rightarrow 9^{2n} - 4^{2n} \text{ é sempre divisível por } 13$$

Será?

Bom, vamos ver.

O primeiro passo é reescrever a coisa assim

$$(13 - 4)^{2n} - 4^{2n}$$

E agora, a gente examina o que acontece com as potências pares de $13 - 4$.

O primeiro caso é esse aqui

$$(13 - 4)^2$$

O que a gente reescreve assim

$$13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 4 + 4^2$$

e depois assim

$$13K + 4^2$$

— (um múltiplo de 13 mais 4^2 ...)

Daí, a gente vai direto para o raciocínio esquemático do próximo caso

$$(13 - 4)^3$$

$$\Rightarrow (13 - 4)^2 \cdot \underbrace{(13 - 4)^2}_{\text{caso anterior}}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 4 + 4^2) \cdot (13K + 4^2) \\
&\Rightarrow (13L + 4^2) \cdot (13K + 4^2) \\
&\Rightarrow 13^2 KL + 13 \cdot 4^2 L + 13 \cdot 4^2 K + 4^4 \\
&\Rightarrow 13K + 4^4
\end{aligned}$$

— (um múltiplo de 13 mais 4^4 ...)

E aqui a gente descobriu que

$$\rightarrow (13 - 4)^{par} \text{ sempre dá um múltiplo de 13 mais } 4^{par}$$

Agora, a gente volta para a nossa expressão

$$(13 - 4)^{2n} - 4^{2n}$$

E reescreve a coisa assim

$$13K + 4^{2n} - 4^{2n}$$

e depois assim

$$13K$$

E aqui já dá pra ver que

$$\rightarrow 9^{2n} - 4^{2n} \text{ é sempre divisível por 13}$$

Mas não é só isso.

Quer dizer, aqui também dá pra ver mais uma regra

$$\begin{aligned}
&\rightarrow K^{2n} - Q^{2n} \text{ é sempre divisível por } K + Q \\
&\text{— (qualquer coisa elevada a par mais qualquer coisa elevada a par é sempre divisível por} \\
&\quad \text{qualquer coisa mais qualquer coisa)}
\end{aligned}$$

Porque o raciocínio sempre funciona nessa situação.

Essa é o outro lado da Regra do $K + Q$.

E ela generaliza o caso b da Regra do $K + 1$.

Então agora, nós temos a seguinte coleção de regras

Regra do $K - Q$:

$$\Rightarrow K^n - Q^n \text{ é sempre divisível por } K - Q$$

Regra do $K + Q$:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} &\Rightarrow K^{2n+1} + Q^{2n+1} \text{ é sempre divisível por } K + Q \\
\text{(b)} &\Rightarrow K^{2n} - Q^{2n} \text{ é sempre divisível por } K + Q
\end{aligned}$$

Essas são as únicas regras que a gente precisa lembrar.

Porque as outras são casos particulares delas.

Mas se a gente sabe raciocinar, a gente não precisa lembrar de nada ...

4 Raciocinando com as regras

Enquanto a gente ainda lembra das regras, nós podemos utiliza-las em nossos raciocínios.

Então considere o seguinte

$$\rightarrow 3^{2n} + 4^{n+1} \text{ é sempre divisível por } 5$$

Esse exemplo já foi resolvido na aula passada.

Mas agora nós vamos resolve-lo de outro jeito.

O primeiro passo é reescrever a coisa assim

$$(3^2)^n + 4 \cdot 4^n$$

e depois assim

$$9^n + 4 \cdot 4^n$$

Daí, a gente aplica o truque do zero

$$9^n + 4 \cdot 4^n + 0$$

Aqui, a esperteza é desmontar o zero assim

$$9^n + 4 \cdot 4^n + 4^n - 4^n$$

A seguir, a gente faz uma continha e reaaruma as coisas assim

$$9^n - 4^n + 5 \cdot 4^n$$

E observa que

$$\underbrace{9^n - 4^n}_{\text{div. p/5}} + \underbrace{5 \cdot 4^n}_{\text{div. p/5}}$$

A seguir nós vamos ver mais exemplos.

Exemplos

a. Divisibilidade por 7

Considere o seguinte

$$\rightarrow 2^{n+2} + 3^{2n+1} \text{ é sempre divisível por } 7$$

Será?

Bom, vamos ver.

O primeiro passo é reescrever a coisa assim

$$2^2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^{2n}$$

e depois assim

$$4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n$$

Daí, a gente aplica o truque que a gente acabou de ver.

Quer dizer, primeiro a gente aplica o truque do zero

$$4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n + 0$$

A seguir, desmonta o zero assim

$$4 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n + 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^n$$

Rearruma a coisa assim

$$4 \cdot 2^n + 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 9^n - 3 \cdot 2^n$$

Faz uma continha, e coloca o 3 em evidência

$$7 \cdot 2^n + 3 \cdot (9^n - 2^n)$$

E observa que

$$\underbrace{7 \cdot 2^n}_{\text{div. p/7}} + 3 \cdot \underbrace{(9^n - 2^n)}_{\text{div. p/7}}$$

◇

b. Uma pequena esperteza

Considere isso aqui

$$\rightarrow 23^{3n} - 1 \text{ é sempre divisível por 7}$$

Será?

Bom, vamos ver.

Quer dizer, o 23 já é um número bem grande.

Mas, uma pequena esperteza faz ele ficar pequeno.

A esperteza é reescrever a coisa assim

$$(21 + 2)^{3n} - 1$$

Daí, não é difícil ver que

$$\rightarrow (21 + 2)^{3n} \text{ sempre dá um múltiplo de 21 mais } 2^{3n}$$

— (a gente já fez esse raciocínio hoje ...)

Logo, a gente pode reescrever a nossa expressão assim

$$21K + 2^{3n} - 1$$

O próximo passo é reescrever a coisa assim

$$21K + (2^3)^n - 1$$

e depois assim

$$21K + 8^{3n} - 1$$

E observar que

$$\underbrace{21K}_{\text{div. p/7}} + \underbrace{8^{3n} - 1}_{\text{div. p/7}}$$

◇